ЕГЭ

Под редакцией
Ф.Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ-2016

Решения с методическими рекомендациями

По новой 2016 демоверсии

Профильный уровень

ТМ

ЛЕГИОН

40 тренировочных вариантов

Учебные пособия издательства «Легион» допущены к использованию в образовательном процессе приказом Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009

Учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ»

Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ-2016

Профильный уровень

Решения с методическими рекомендациями

Учебно-методическое пособие

ЛЕГИОН
Ростов-на-Дону
2016

ББК 22.1
М 34

Рецензенты: *А. Н. Тернопол* — доцент кафедры естественно-математического образования ФГОУ АПК и ППРО, г. Москва;
О. Б. Кожевников — кандидат физико-математических наук, доцент;
А. П. Уваровский — кандидат педагогическими наук, заслуженный учитель РФ.

Авторский коллектив:
Авилов Н. И., Войта Е. А., Дерезин С. В., Иванов С. О., Коннова Е. Г., Корянов А. Г., Кривенко В. М., Кулабухов С. Ю., Ольховая Л. С., Ольховой А. Ф., Резникова Н. М., Фридман Е. М., Ханин Д. И.

М 34 **Математика. Решения с методическими рекомендациями. Подготовка к ЕГЭ-2016. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии на 2016 год**: учебно-методическое пособие / Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2016. — 352 с. — (ЕГЭ).

ISBN 978-5-9966-0813-3

Пособие является частью **учебно-методического комплекса «Математика. Подготовка к ЕГЭ»**, включающего такие книги, как «Математика. ЕГЭ-2016. Учебно-тренировочные тесты», «Математика. 10—11 классы. Тренажёр для подготовки к ЕГЭ: алгебра, планиметрия, стереометрия» и др.

Книга содержит подробные методические рекомендации к выполнению заданий из ранее вышедшего пособия «Матеметика. Подготовка к ЕГЭ-2016. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии на 2016 год». Это позволяет самостоятельно освоить необходимые навыки для успешной сдачи итоговой аттестации в форме ЕГЭ.

Замечания и предложения, касающиеся данной книги, можно присылать по почте или на электронный адрес: `legionrus@legionrus.com`.

Обсудить пособие, оставить свои замечания и предложения, задать вопросы можно на форумах издательства: `http://f.legionr.ru`, `http://legion-posobiya.livejournal.com`.

ББК 22.1

ISBN 978-5-9966-0813-3

Оглавление

2. Зак. № 82

Глава I. Методические рекомендации по выполнению заданий ЕГЭ

В ранее вышедшей книге «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2016. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии на 2016 год» приведено решение каждого четвёртого варианта. В настоящем пособии представлены решения остальных вариантов. Обращаем ваше внимание, что условий заданий в данном пособии нет, они содержатся в указанной выше основной книге.

При работе с настоящим пособием следует учитывать, что решения в нём описаны более подробно, чем требуется от учащегося, выполняющего экзаменационную работу. Таким образом, они не являются образцом записи решений предлагаемых тренировочных вариантов, а служат для обучения (в том числе самообучения) методам решения типовых экзаменационных заданий. Например, при решении алгебраического уравнения многие рассуждения можно излагать устно, записав лишь основные выкладки. При выполнении геометрических задач от учащегося не требуется записывать формулировки общеизвестных теорем (типа теоремы Пифагора), а достаточно правильно выстроить цепочку рассуждений и привести ссылки на эти теоремы.

Задания тренировочных тестов мы будем разбивать на типы и для каждого типа давать рекомендации по выполнению или последовательность шагов, приводящих к правильному решению.

Замечания к решениям задач 1

Задача относится к заданиям базового уровня. Приступая к её решению, учащиеся должны уверенно владеть основными методами решения задач:

— на нахождение процента (дроби) от числа;

— на нахождение числа по величине его процента (дроби).

Тематика таких задач отражает множество ситуаций повседневной жизни человека, когда требуется применение этих методов.

Далее приводится некоторая классификация задач, представленных в нашем пособии.

I. По теме «Нахождение процента от числа».

Типы заданий	Номера вариантов
Вычисление стоимости билета	11, 12
Вычисление налога на доходы	13, 14
Вычисление скидки во время распродажи	15
Вычисление процента снижения цены	5, 6
Вычисление суммы денег, которую надо вносить ежемесячно для погашения кредита	7, 8
Вычисление цены на товар при повышении цен	16
Вычисление статистических данных по населению городов	17, 18
Определение стоимости покупки, если предоставляется процент скидки при определённых условиях	27, 28
Определение комиссии с платежа	37, 38

II. По теме «Нахождение числа по величине его процента».

Типы заданий	Номера вариантов
Вычисление числа учащихся школы по величине процента учащихся с каким-то особым свойством	1, 2

III. По теме «Округление с недостатком и избытком».

Типы заданий	Номера вариантов
Определение наименьшего числа (в соответствии с содержанием задачи — это округление с избытком)	3, 4, 9, 10
Нахождение процента от числа и округление (в соответствии с содержанием задачи — это округление с недостатком)	35, 36

IV. По теме «Задачи из повседневной практики».

Типы заданий	Номера вариантов
Определение по номеру квартиры этажа в подъезде или номера подъезда	19, 20
Определение длительности поездки по времени отправления и прибытия	21, 22
Вычисление стоимости израсходованной воды, электроэнергии по показаниям счётчиков, стоимости мобильной связи и т. д.	25, 26, 33, 34
Перевод величины скорости из одной системы единиц в другую	23, 24
Определение размера сдачи после оплаты покупки	29, 30
Определение выгодности той или иной покупки	31, 32
Обмен валют	39, 40

Замечания к решениям задач 2

В задании предлагается проанализировать информацию, представленную на графиках и диаграммах. При этом от учащихся не требуется глубокого понимания ситуации построения графика или диаграммы, однако учителю на уроках повторения целесообразно включать материал практической направленности. Учащимся для успешного выполнения данного задания необходимо лишь осмыслить вопрос — что спрашивается в задании и поставить соответственно каждому значению числа на горизонтальной оси число на вертикальной оси. При этом надо учитывать, что наибольшее значение — крайнее верхнее число, наименьшее значение — крайнее нижнее число.

Задания под номером 2 каждого варианта, представленные в книге «Математика. Подготовка к ЕГЭ-16. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии на 2016 год», можно классифицировать по типам: а) задачи, в которых используется график, на котором обычно представлены в виде точек данные задачи, соединённые между собой тонкой линией; б) задачи в которых используется диаграмма — как способ графического отображения данных. Далее приводятся примеры и краткие рекомендации по каждому типу заданий.

а) Использование графика

Вариант 1 — наименьшая среднесуточная влажность воздуха за период с 10 по 18 февраля определяется по самой нижней точке графика (см. рис. 1). Эта точка соответствует числу 17 февраля, и её значение равно 71 % на вертикальной оси. Ответ: 71.

Рис. 1

Вариант 25 — дни марта представлены на горизонтальной оси, на вертикальной оси — количество осадков (см. рис. 2). Тогда через точку 4 на вертикальной оси проводим прямую, параллельную горизонтальной оси, и отсюда все точки, обозначенные на рисунке выше этой прямой, — это точки, соответствующие определённым числам месяца: 20 марта, 22 марта и в том числе 16 марта. Так как в вопросе сказано «выпало осадков 4 мм и более», то ответ равен 3.

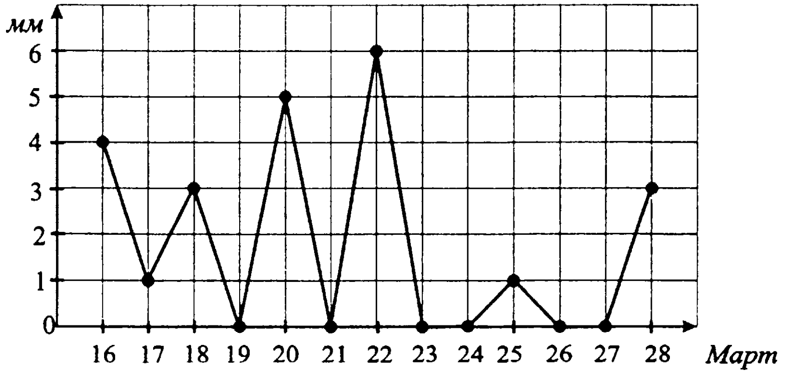


Рис. 2

Вариант 17 (см. рис. 3). По графику находим наибольшую температуру воздуха — это самая высокая точка, она соответствует на вертикальной оси отметке 4, а наименьшая температура воздуха — это самая нижняя точка и она соответствует на вертикальной оси отметке -10. Разность между наибольшим и наименьшим значениями температур равна $4 - (-10) = 4 + 10 = 14$. Ответ: 14.

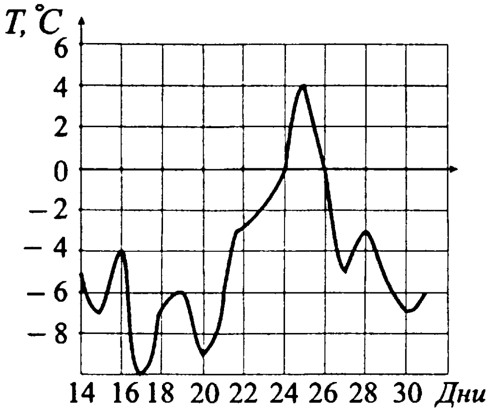


Рис. 3

Ниже приводится распределение задач рассматриваемого типа по вариантам.

1. Задачи на нахождение среднесуточной влажности воздуха, температуры воздуха и др. Варианты: 25, 26, 27, 28, 37, 38 .

2. Задачи на нахождение скорости ветра, автомобиля и др. Варианты: 15, 16, 23, 24.

3. Задачи на нахождение наибольшего (наименьшего) количества осадков, часов, температуры воздуха, периода времени и др. Варианты: 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 19, 20, 31, 32.

4. Задачи на нахождение удельной теплоёмкости, граммов вещества и др. Варианты: 17, 18, 35, 36, 39, 40.

Таким образом, при выполнении задания 2 (с использованием рисунков (графиков) необходимо:

1) определить по условию необходимые данные и соответственно то, что надо найти;

2) провести через точку на вертикальной (горизонтальной) оси прямую, параллельную горизонтальной (вертикальной) оси, и найти точки пересечения с графиком (найти ответ на вопрос в задании).

б) Использование диаграммы

Вариант 21. На диаграмме (см. рис. 4) определяем ось горизонтальную — «фабрики» и ось вертикальную — количество выпускаемых карамелек в кг. Определяем первое место (по условию) — самая высокая колонка, это фабрика «Хруст» — 1800 кг, «Радость дантиста» — 1400 кг. Считаем, сколько фабрик выпускают продукцию больше 1400 кг, то есть выше линии, проходящей через отметку 1400 параллельно горизонтальной оси, считаем — это пять фабрик. Значит, «Радость дантиста» на шестом месте. Ответ: 6.

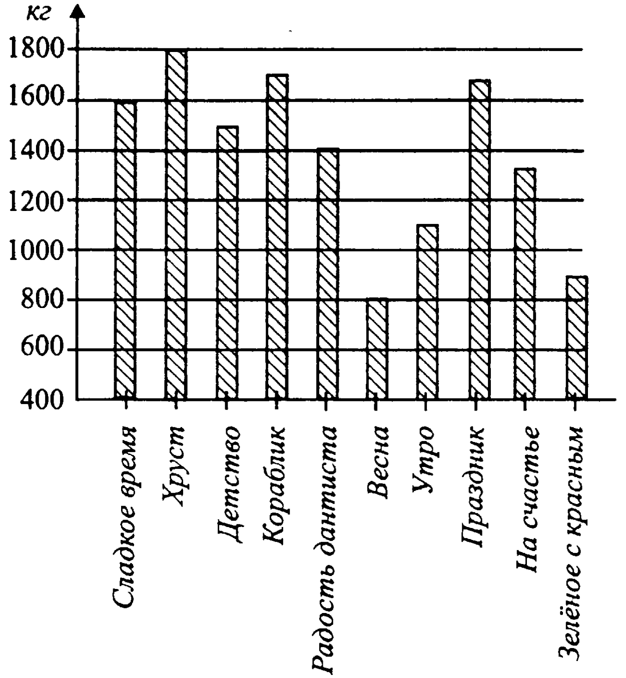


Рис. 4

Ниже приводится распределение задач рассматриваемого типа по вариантам.

1. Задания на определение номера месяца по среднемесячной температуре воздуха в месяце; задания по нахождению наибольшего (наименьшего) количества людей, посещающих сайт. Варианты: 5, 6, 11. Для их решения необходимо: а) определить, какие данные указаны на осях, б) найти данные по диаграмме, которые соответствуют вопросу задания.

2. Задания на поиск номера месяца, когда а) впервые было что-то продано, куплено и т. п.; б) температура воздуха опускалась (поднималась) ниже (выше) и т. п.; в) норма осадков составляет менее (более) какой-то величины и т. п. Варианты: 12, 13, 14. Для их решения необходимо: а) выяснить, что обозначают данные на осях, б) найти число, которое обозначено в вопросе, и провести через него прямую, параллельную той оси, где будет находится ответ, в) записать найденное число в ответ.

3. Задания на определение места среди остальных. Варианты: 21, 22. Так же, как и в предыдущих пунктах, сначала определяем, какие данные обозначены на осях координат, определяем первое место (согласно условию), находим объект, относительно которого надо ответить на вопрос и подсчитываем количество объектов, которые находятся выше (ниже) данного.

4. Задания на нахождение наибольшего (наименьшего) числа посетителей сайта или других величин. Варианты: 29, 30, 33, 34. Определяем период времени, а затем ищем либо самую высокую, либо самую низкую точку (в зависимости от вопроса задачи).

Таким образом, при выполнении заданий 2 (с использованием диаграмм) необходимо:

1) определить, какие переменные стоят на горизонтальной и вертикальной осях;

2) соотнести исходные данные с вопросом задания;

3) найти значение, соответствующее данным в условии.

Замечания к решениям задач 3

В задании 3 проверяется умение применять полученные геометрические знания в практической деятельности.

Задачи этого типа, представленные в книге, можно разбить на классы следующим образом.

1) На клетчатой бумаге с заданным размером клетки изображена фигура. Нужно найти её площадь, длину отрезка или тангенс угла.

При отыскании площади треугольника, в зависимости от его расположения на клетчатой бумаге, в некоторых задачах сразу можно воспользоваться формулой $S = \frac{1}{2}ah$, определив по рисунку основание и высоту, как, например, в варианте 2 (см. рис. 5).

Есть задачи, в которых для отыскания площади заданной фигуры целесообразно выполнить дополнительные построения (как, например, в варианте 21), а затем вычислить площадь фигуры (см. рис. 6).

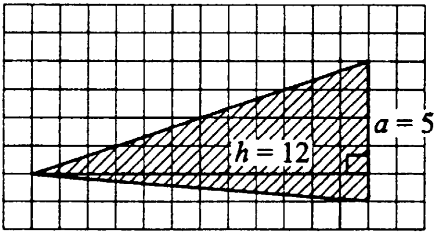


Рис. 5

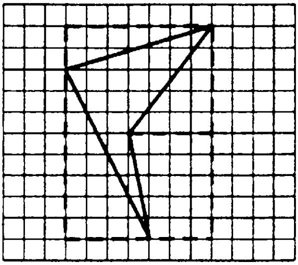


Рис. 6

Расстояние между двумя точками A и B находим с помощью теоремы Пифагора, построив прямоугольный треугольник с гипотенузой AB.

Чтобы найти тангенс заданного угла (вариант 32), необходимо достроить угол до прямоугольного треугольника и воспользоваться определением тангенса острого угла прямоугольного треугольника (см. рис. 7)

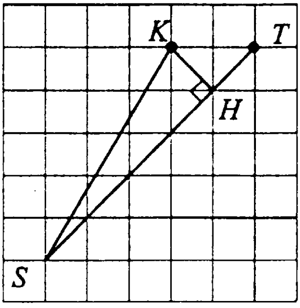


Рис. 7

2) В системе координат задан многоугольник. Требуется найти его площадь, координаты вершины, длину диагонали и т. д.

Так, в варианте 7 требуется найти площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (1; 1), (1; 4), (10; 0), (10; 7). Площадь трапеции находим по формуле $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, где a, b — основания трапеции, h — высота трапеции. $a = 3$, $b = 6$, $h = 9$ (см. рис. 8).

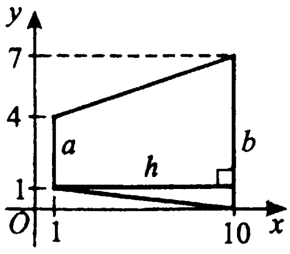


Рис. 8

3) Задан вписанный в окружность четырёхугольник или окружность, описанная около четырёхугольника. Требуется найти сторону четырёхугольника, среднюю линию, периметр и т. д.

Для того чтобы успешно справиться с задачей, следует знать свойства вписанного и описанного четырёхугольника.

4) Найти угол, полученный при пересечении прямой и стороны треугольника (варианты 19, 20).

Для решения этой задачи нужно знать теорему о сумме внутренних углов треугольника, теорему о внешнем угле треугольника.

Замечания к решениям задач 4

Задача 4 — задание базового уровня сложности на применение теории вероятностей и (реже) статистики. В пособии **«Математика. Подготовка к ЕГЭ-2015. Теория вероятностей»** приводится классификация таких заданий, а также подробно рассматриваются различные методы их решения.

Здесь кратко рассматриваются методы решения указанных типов заданий.

Типы заданий	Номера вариантов
Определение вероятности или частоты	1*, 2, 3, 4, 5*, 6, 9*, 10, 15, 16, 17*, 18, 19, 20, 21*, 22, 23, 24, 27, 28, 35, 36
Объединение несовместных событий	7, 8, 13*, 14, 33*, 34, 39, 40
Пересечение независимых событий	11, 12, 25*, 26, 29*, 30, 31, 32, 33*, 34, 37*, 38, 39, 40

* Звёздочкой отмечены варианты, решение которых приведено в основной книге.

1. Задание 4: определение вероятности или частоты

Материал для повторения: элементарный исход, событие, классическое определение вероятности, частота.

Задания на применение классического определения вероятности события или частоты.

1. Необходимо определить, что будет являться элементарным исходом в рассматриваемой задаче. Например, в задании варианта № 4 исходом является выбранная сумка, здесь всего $981 + 19 = 1000$ исходов.

2. Нужно определить число благоприятных исходов. В рассмотренном примере событию «выбрана сумка с дефектами» благоприятствуют 19 исходов.

3. Согласно определению вероятности необходимо разделить число благоприятных исходов на общее число исходов. Получившееся частное будет ответом.

Замечание. Процесс нахождения частоты некоторого события аналогичен рассмотренному процессу нахождения вероятности.

2. Задание 4: объединение несовместных событий

Материал для повторения: противоположные события, вероятность противоположного события, несовместные события, вероятность объединения несовместных событий.

Задания, часть решения которых (или всё решение) основано на применении формулы вероятности объединения несовместных событий. Иногда здесь также требуется применить формулу вероятности противоположного события.

1. Необходимо убедиться, что рассматриваемые события несовместны, то есть не могут наступить одновременно. Например, в задании варианта № 7 удобно рассмотреть события A «учащийся решил ровно 12 задач» и B «учащийся решил более 12 задач». Эти события несовместны.

2. Далее следует применить формулу для вероятности объединения несовместных событий (она равна сумме их вероятностей). В рассматриваемом примере формула имеет вид $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, откуда $0{,}72 = P(A) + 0{,}68$.

3. При необходимости нужно применить формулу вероятности противоположного события и получить ответ. В рассматриваемом примере формула для противоположного события не требуется, ответ $P(A) = 0{,}04$ следует из полученного выше равенства.

3. Задание 4: пересечение независимых событий

Материал для повторения: противоположные события, вероятность противоположного события, независимые события, вероятность пересечения несовместных событий.

Задания, часть решения которых (или всё решение) основано на применении формулы вероятности пересечения независимых событий. Иногда здесь также требуется применить формулу вероятности противоположного события.

1. Необходимо убедиться, что рассматриваемые события независимы, то есть наступление одного из них не влияет на вероятность наступления другого. Например, в задании варианта № 11 каждый из терминалов неисправен с вероятностью 0,06. Эти события независимы по условию задачи.

2. Далее следует применить формулу для вероятности пересечения независимых событий (она равна произведению их вероятностей). В рассматриваемом примере можно найти вероятность одновременной неисправности обоих терминалов: $0{,}06 \cdot 0{,}06 = 0{,}0036$.

3. При необходимости нужно воспользоваться формулой вероятности противоположного события и получить ответ. В рассматриваемом примере применяем эту формулу, отыскивая вероятность события «хотя бы один из терминалов исправен»: $1 - 0{,}0036 = 0{,}9964$.

Замечание. При решении некоторых заданий требуется применение формулы как для объединения несовместных событий, так и для пересечения независимых событий.

Замечания к решениям задач 5

Задание 5 проверяет умение учащихся строить и исследовать простейшие математические модели: в нём требуется решить уравнение и выбрать корень, удовлетворяющий тому или иному условию.

В книге «Математика. Подготовка к ЕГЭ. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии на 2016 год» задания типа 5 содержат следующие виды уравнений:

1) линейные уравнения и уравнения, сводящиеся к линейным;

2) квадратные уравнения и уравнения, сводящиеся к квадратным;

3) показательные уравнения;

4) иррациональные уравнения;

5) логарифмические уравнения;

6) тригонометрические уравнения.

Помимо знания методов решения этих уравнений, учащимся нужно знать и уметь применять свойства числовых равенств, основное свойство пропорции, тождества сокращённого умножения, определения функций и их свойства.

Если уравнение допускает несколько способов решения, учащийся выбирает любой по своему усмотрению. Так, уравнение $(3x-19)^2 = (3x+22)^2$ (вариант 12) можно преобразовать в уравнение $(3x-19)^2 - (3x+22)^2 = 0$ и затем воспользоваться формулой разности квадратов, а можно обе части возвести в квадрат и далее привести подобные слагаемые.

Решая уравнение, школьник должен следить за тем, чтобы преобразования, которые он применяет, не привели к потере корней, а также с помощью проверки или метода равносильных преобразований отсекать посторонние корни.

Типичная ошибка, которую допускают учащиеся при делении обеих частей равенства на одно и то же выражение, — это то, что упускается условие, что это выражение отлично от нуля.

Так, если разделить обе части уравнения $\dfrac{2x+4}{3x+17} = \dfrac{2x+4}{17x+3}$ (вариант 25) на выражение $2x+4$, будет потерян корень $x = -2$. Действительно, при $x = -2$ уравнение примет вид $0 = 0$ (знаменатели в нуль при $x = -2$ не обращаются), если же $x \neq -2$, то разделим обе части на выражение $2x+4$. Останется приравнять знаменатели полученного уравнения $\dfrac{1}{3x+17} = \dfrac{1}{17x+3}$ и найти ещё один корень.

Школьники хорошо знают, что при возведении в квадрат обеих частей уравнения могут появиться посторонние корни, они также знают, что нужно найти ОДЗ уравнения. Так, ОДЗ уравнения $\sqrt{0{,}4-1{,}8x} = -x$ (вариант 23) находим из условия $0{,}4 - 1{,}8x \geqslant 0$, то есть $x \leqslant 4{,}5$.

Но прежде чем возводить в квадрат обе части уравнения $\sqrt{0{,}4 - 1{,}8x} = -x$, нужно помнить, что выражение $-x$, стоящее в правой части, должно быть неотрицательно, то есть $-x \geqslant 0$, значит, корнями уравнения могут быть неположительные числа.

Замечания к решениям задач 6

Задача 6 — задание базового уровня сложности по планиметрии.

Здесь кратко рассматриваются методы решения указанных типов заданий.

Типы заданий	Номера вариантов
Тригонометрия в прямоугольном треугольнике	1*, 2, 3, 4, 5*, 6, 7, 8, 11, 12, 23, 24, 29*, 30, 31, 32, 33*, 34, 39, 40
Прямоугольный треугольник с углом 30°	9*
Описанная окружность	9*, 10, 27, 28
Вписанная окружность	11, 12, 37*, 38, 39, 40
Теорема синусов	10
Правильный шестиугольник	11, 12
Вписанный угол	13*, 14
Угол между касательной и хордой	15, 16
Трапеция	17*, 18, 31, 32, 33*, 34, 35, 36
Параллелограмм	22, 25*, 26
Равнобедренный треугольник	17*, 18, 19, 20, 37*, 38, 39
Площадь треугольника	19, 20, 21*, 37*

* Звёздочкой отмечены варианты, решение которых приведено в основной книге.

1. Задание 6: тригонометрия в прямоугольном треугольнике

Материал для повторения: синус, косинус, тангенс, котангенс, теорема Пифагора.

Часто встречающиеся задания, проверяющие умение отыскивать элементы прямоугольного треугольника. Здесь также часто применяется теорема Пифагора, позволяющая найти третью сторону прямоугольного треугольника при двух известных. Иногда в прямоугольном треугольнике к гипотенузе проведена высота. Эта высота разбивает исходный треугольник на два меньших прямоугольных треугольника, соотношения между элементами которых могут использоваться при решении задачи.

2. Задание 6: прямоугольный треугольник с углом 30°

Материал для повторения: теорема о катете против угла 30°.

Задания представляют собой частный случай предыдущего типа (на применение тригонометрии). Здесь при решении удобно применить теорему о том, что катет против угла 30° вдвое меньше гипотенузы. Тем не менее допускается и решение с использованием тригонометрии.

3. Задание 6: описанная окружность

Материал для повторения: окружность, вписанный четырёхугольник, вписанный угол.

Задания, в которых фигурирует окружность, описанная около многоугольника. При их решении следует помнить теорему о вписанном угле, а также свойство четырёхугольника, вписанного в окружность (сумма его противоположных углов равна 180°).

4. Задание 6: вписанная окружность

Материал для повторения: окружность, описанный четырёхугольник, касательная к окружности.

Задания, в которых фигурирует окружность, вписанная в многоугольник. Следует помнить, что каждая сторона такого многоугольника касается окружности и перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания. Если же окружность вписана в четырёхугольник, то суммы его противоположных сторон равны.

5. Задание 6: теорема синусов

Материал для повторения: теорема синусов, описанная окружность.

Теорема синусов бывает полезна, если нужно найти неизвестный элемент треугольника

а) из тройки: угол, противолежащая ему сторона, радиус описанной около треугольника окружности;

б) из четвёрки: первый угол, противолежащая ему сторона, второй угол, противолежащая ему сторона.

6. Задание 6: правильный шестиугольник

Материал для повторения: правильные многоугольники, описанная окружность.

Правильный шестиугольник обладает следующими свойствами:

а) радиус описанной около него окружности равен стороне шестиугольника;

б) отрезки, проведённые из центра шестиугольника к его вершинам, разбивают шестиугольник на 6 правильных треугольников;

в) угол правильного шестиугольника равен 120°.

7. Задание 6: вписанный угол

Материал для повторения: вписанный угол, теорема о вписанном угле.

При решении заданий на вписанный угол обычно используется один из следующих фактов:

а) вписанный угол равен половине градусной меры дуги, на которую он опирается;

б) вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу;

в) вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны.

8. Задание 6: угол между касательной и хордой

Материал для повторения: вписанный угол, касательная, теорема об угле между касательной и хордой.

При решении заданий на угол между касательной и хордой обычно используется один из следующих фактов:

а) угол между касательной и хордой, проведённой через точку касания, равен половине градусной меры дуги, заключённой между касательной и хордой;

б) угол между касательной и хордой, проведённой через точку касания, равен вписанному углу, опирающемуся на дугу, заключённую между касательной и хордой.

8. Задание 6: трапеция

Материал для повторения: трапеция, площадь трапеции, средняя линия трапеции, теорема Пифагора.

При решении заданий на трапецию обычно используются следующие факты:

а) площадь трапеции равна произведению высоты трапеции и полусуммы её оснований;

б) площадь трапеции равна произведению высоты трапеции и её средней линии;

в) высоты, проведённые из вершин меньшего основания равнобедренной трапеции, разбивают эту трапецию на прямоугольник и два равных прямоугольных треугольника.

9. Задание 6: параллелограмм

Материал для повторения: параллелограмм, площадь параллелограмма.

При решении заданий на параллелограмм следует применять формулу его площади (произведение основания и проведённой к нему высоты).

Таким образом, площадь параллелограмма может быть вычислена двумя способами в зависимости от того, какую из сторон выбрать в качестве основания.

10. Задание 6: равнобедренный треугольник

Материал для повторения: равнобедренный треугольник и его свойства.

При решении заданий на равнобедренный треугольник наиболее часто используются следующие факты:

а) в равнобедренном треугольнике углы при основании равны;

б) если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный;

в) биссектриса, медиана и высота равнобедренного треугольника, проведённые к основанию, совпадают.

11. Задание 6: площадь треугольника

Материал для повторения: равнобедренный треугольник и его свойства.

При решении заданий на площадь треугольника могут использоваться разные формулы, которые приведены в справочнике к основной книге. При использовании наиболее распространённой формулы (половина произведения стороны на высоту, проведённую к прямой, содержащей эту сторону) следует учитывать, что сторону и проведённую высоту можно выбрать тремя разными способами.

Замечания к решениям задач 7

Задача 7 — задание базового уровня сложности на понимание смысла производной и (реже) первообразной функции. В пособии **«Математика. Подготовка к ЕГЭ. Производная: задания B9 и B15. Легион, 2014»** приводится классификация таких заданий, а также подробно рассматриваются различные методы их решения.

Здесь кратко рассматриваются методы решения указанных типов заданий.

Типы заданий	Номера вариантов
По заданному графику производной определить некоторые свойства функции	7, 8, 9*, 10, 11, 12, 13*, 14, 17*, 18, 25*, 26
По заданному графику функции определить некоторые свойства производной	1*, 2, 3, 4, 5*, 6, 23, 24, 27, 28, 31, 32
Использование свойств касательной в задачах без заданного графика	15, 16, 35, 36, 37*, 38
Физический смысл производной	19, 20, 21*, 22
На понимание смысла первообразной	29*, 30, 33*, 34, 39, 40

* Звёздочкой отмечены варианты, решение которых приведено в основной книге.

1. Задание 7: по заданному графику производной определить некоторые свойства функции

Материал для повторения: понятие о производной функции, геометрический смысл производной, целочисленные точки, промежутки монотонности, точки экстремума, применение производной к исследованию функций и построению графиков.

Задания на применение производной к исследованию функций и построению графиков, в условии которых задан график производной функции. Следует помнить, что вопросы в задании могут относиться к какому-то определённому промежутку, а не ко всему графику.

Поведение производной на графике	Характеристики функции
производная положительна на отрезке (график выше оси Ox)	функция возрастает на отрезке
производная отрицательна на отрезке (график ниже оси Ox)	функция убывает на отрезке
производная меняет знак в точке x_0 (график пересекает ось Ox)	x_0 — точка экстремума
производная меняет знак с «$+$» на «$-$» в точке x_0 (график пересекает ось Ox)	x_0 — точка максимума
производная меняет знак с «$-$» на «$+$» в точке x_0 (график пересекает ось Ox)	x_0 — точка минимума
значение производной в точке x_0 равно k ($f'(x_0) = k$)	x_0 — точка касания функции и её касательной $y = kx+b$ в точке x_0 (может быть также дано уравнение прямой, параллельной касательной)

Замечание. Если касательная на заданном рисунке проведена на клетчатой бумаге, нужно найти две точки на этой прямой (как правило, они специально выделены и имеют целочисленные координаты). После этого нужно определить координаты этих точек и вычислить разности абсцисс Δx и ординат Δy. Производная в точке x_0 равна отношению $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

2. Задание 7: по заданному графику функции определить некоторые свойства производной

Материал для повторения: понятие о производной функции, геометрический смысл производной, целочисленные точки, промежутки монотонности, точки экстремума.

Задания на определение соответствия между характеристиками графика функции и её производной, в условии которых задан график функции. Следует помнить, что вопросы в задании могут относиться к какому-то определённому промежутку, а не ко всему графику.

Характеристики функции на графике	Характеристики производной
функция возрастает на отрезке	производная положительна в каждой точке отрезка, кроме точек с горизонтальной касательной (там она равна нулю)
функция убывает на отрезке	производная отрицательна в каждой точке отрезка, кроме точек с горизонтальной касательной (там она равна нулю)
x_0 — точка экстремума (с горизонтальной касательной)	производная равна нулю в точке x_0
одна из проведенных на рисунке касательных имеет наибольший острый угол с положительным направлением оси абсцисс	значение производной в соответствующей точке касания наибольшее
одна из проведённых на рисунке касательных имеет наименьший тупой угол с положительным направлением оси абсцисс	значение производной в соответствующей точке касания наименьшее
проведённая на рисунке касательная имеет тангенс угла с положительным направлением оси абсцисс, равный k	значение производной в точке x_0 равно k ($f'(x_0) = k$)

3. Задание 7: использование свойств касательной в задачах без заданного графика

Материал для повторения: уравнение касательной к графику функции, производные суммы, разности, произведения, производные основных элементарных функций.

Задания, часть решения которых (или всё решение) основано на применении равенства углового коэффициента касательной значению производной в точке касания. Иногда здесь также требуется применить условие параллельности прямых.

1. Необходимо определить угловой коэффициент касательной или прямой, параллельной касательной. Для прямой, заданной уравнением $y = kx + b$, он равен k, например, для уравнения $y = 8x + 1$ это будет 8.

2. Найти производную заданной функции и приравнять найденному угловому коэффициенту.

3. Если полученного уравнения недостаточно для нахождения требуемого, то нужно приравнять значения производной и функции в точке касания и решить полученное уравнение (систему уравнений).

4. Задание 7: физический смысл производной

Материал для повторения: физический смысл производной, нахождение скорости для процесса, заданного формулой или графиком.

Задания, решение которых основано на знании того, что производная по времени перемещения материальной точки равна скорости этой точки.

1. Необходимо по заданному уравнению движения найти производную — это и будет уравнение изменения скорости в зависимости от времени.

2. Нужно подставить в полученное уравнение значения времени или скорости в заданный момент времени.

3. Из полученного уравнения (формулы) найти значение искомой величины.

5. Задание 7: на понимание смысла первообразной

Материал для повторения: первообразные элементарных функций, примеры применения интеграла для вычисления площади.

Задания, часть решения которых (или всё решение) основано на применении теоремы о разности первообразных и её связи с площадью криволинейной трапеции. В вариантах 39, 40 нужно знать свойства первообразной, следующие из её определения (а именно то, что функция равна нулю в точках, где её первообразная имеет стационарные точки, в частности, точки экстремума).

Если в задании требуется найти площадь криволинейной трапеции, то по рисунку нужно найти пределы интегрирования (a и b), а потом вычислить разность $F(b) - F(a)$, используя заданное уравнение первообразной.

Если в задании требуется найти разность $F(b) - F(a)$, то по рисунку нужно найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, графиком функции и прямыми $x = a$ и $x = b$.

Замечания к решениям задач 8

Содержание задания 8 в варианте ЕГЭ-2016 по математике (профильный уровень) определяется обобщённым планом КИМ (контрольно-измерительных материалов) ЕГЭ-2016. В нём отмечается, что задание 8 включено с целью проверки умений выполнять действия с геометрическими фигурами (прямыми и плоскостями в пространстве, многогранниками (призмами, пирамидами), телами вращения (цилиндрами, конусами, шарами) и находить углы, длины отрезков, площади поверхностей и объёмы указанных фигур.

Во всех вариантах учебно-методического пособия «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2016. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии на 2016 год» в задании 8 решается одна из указанных выше задач. А в целом они охватывают все отмеченные виды задач.

Анализ содержания и методов решения задания 8 в различных вариантах

Варианты 1, 2, 3, 4, 5, 6, 17, 18, 35, 36, 37, 38 — находится изменение объёма или площади поверхности заданной фигуры (куба, призмы, конуса, цилиндра) при изменении её размеров.

Материал для повторения: формулы объёма и площади поверхности призмы, конуса и цилиндра.

Варианты 7, 8, 9, 10 — находится объём указанной части (являющейся пирамидой) некоторой заданной фигуры.

Материал для повторения: формулы объёма параллелепипеда и пирамиды. Высота пирамиды, подобие треугольников.

Варианты 11, 12 — находится площадь поверхности шара по заданному радиусу.

Материал для повторения: формулы поверхности шара.

Варианты 13, 14, 15, 16, 19, 20 — находится объём или площадь заданной поверхности, склеенной из прямоугольных параллелепипедов.

Материал для повторения: формулы объёма параллелепипеда и площади прямоугольника.

Варианты 21, 22, 31, 32 — находится объём цилиндра, описанного около заданной правильной четырёхугольной или треугольной призмы, или объём прямоугольного параллелепипеда, описанного около заданного цилиндра.

Материал для повторения: формулы объёма цилиндра и прямоугольного параллелепипеда. Свойство прямоугольника, описанного около окружности.

Варианты 23, 24, 33, 34 — находится расстояние между вершинами заданной фигуры, склеенной из прямоугольных параллелепипедов, или угол между рёбрами и диагоналями прямоугольного параллелепипеда.

Материал для повторения: теорема Пифагора. Понятие угла между скрещивающимися прямыми. Определение синуса и косинуса острого угла.

Варианты 25, 26 — находится выражение одной из переменных через другие из формул объёмов и площадей поверхностей одной из заданных (и перечисленных) выше фигур.

Материал для повторения: формулы объёмов и площадей поверхностей призмы, пирамиды, цилиндра, конуса, шара и их частных видов (куба, прямоугольного параллелепипеда, тетраэдра).

Варианты 27, 28 — используется заданное частное объёмов двух шаров или кубов для сравнения площадей их поверхностей.

Материал для повторения: формулы объёма шара и куба. Формулы пощади поверхности шара и куба.

Варианты 29, 30, 39, 40 — находится площадь поверхности или объём многогранника, вершинами которого являются середины всех рёбер тетраэдра с заданной площадью поверхности или объёмом соответственно.

Материал для повторения: площадь треугольника, площадь треугольника, соединяющего середины сторон заданного треугольника.

Замечания к решениям задач 9

Задание 9 из части 2 относится к заданию повышенного уровня сложности с кратким ответом. Знания, проверяемые в этом задании, не выходят за рамки школьной программы 7 – 10 классов по алгебре. Для успешного решения этого задания учащиеся должны иметь навыки в решении заданий по темам:

– задания со степенями:

а) с одинаковыми основаниями: варианты 23, 24, 37, 38;

б) с разными основаниями: варианты 3, 4, 5, 6;

— применение формул:
а) квадрат суммы: варианты 21, 22;
б) разность квадратов: вариант 1;
в) произведение разности чисел на их сумму: вариант 2.
— действия с дробно-рациональными выражениями: варианты 17, 18;
— действия с дробно-иррациональными выражениями: варианты 19, 20;
— вычисление значений выражений с применением определения и свойств логарифмов: варианты 25, 26, 27, 28, 29, 30;
— вычисление значений выражений с применением определения и свойств тригонометрических функций: варианты 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16;
— вычисление значения иррационального выражения на промежутке, которому принадлежит переменная: варианты 35, 36;
— вычисление значения дроби по заданному значению другой дроби: варианты 33, 34.

Замечания к решениям задач 10

Задание 10 проверяет умение учащихся строить и исследовать простейшие математические модели.

Краткая классификация этих задач в книге «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2016. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии на 2016 год».

Типы заданий	Номера вариантов
Рейтинги (показательное или дробно-рациональное уравнение, выражение)	3, 4, 7, 8
Экономика, зависимость спроса от цены (квадратичное или линейное неравенство)	5*, 6
Физика (дробно-рациональное неравенство или уравнение)	9*, 10, 11, 12, 17*, 18, 19, 20, 21*, 22, 35, 36, 37*, 38
Физика (логарифмическое, показательное, степенное неравенство или уравнение)	13*, 14, 23, 24, 39, 40
Физика (квадратичное неравенство или уравнение)	15, 16, 25*, 26,
Физика (тригонометрическое неравенство)	27, 28, 29*, 30, 31, 32,
Физика (иррациональное уравнение)	1*, 2, 33*, 34,

* Звёздочкой отмечены варианты, решение которых приведено в основной книге.

Решение такой задачи сводится к тому, что вначале, руководствуясь здравым смыслом и житейской логикой, необходимо свести её к математической модели, то есть к уравнению или неравенству одного из указанных в таблице типов. Затем полученное уравнение или неравенство необходимо решить. И наконец, полученное решение нужно правильно интерпретировать, то есть указать, что следует считать ответом, руководствуясь всё тем же здравым смыслом. Учитывая, что все указанные типы уравнений и неравенств необходимы для решения многих других задач ЕГЭ, можно сказать, что для подготовки к этой задаче достаточно прорешать некоторое количество подобных, для того чтобы приобрести необходимый опыт. Другой дополнительной подготовки к этой задаче не требуется.

Замечания к решениям задач 11

Содержание задания 11 в варианте ЕГЭ-2016 по математике (профильный уровень) определяется в соответствии с обобщённым планом КИМ ЕГЭ-2016, в котором отмечается, что задание 11 включено с целью проверки умений строить и исследовать простейшие математические модели. А именно моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения и неравенства (их виды и список указаны в п. 2.1 и 2.2 КТ) по условию задачи.

В учебно-методическом пособии «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2016. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии на 2016 год» задания 11 можно разделить на следующие группы:

I. Задачи на движение

II. Задачи на производительность и совместную работу

III. Задачи на смеси и сплавы

IV. Задачи на проценты

Анализ содержания и методов решения задания 11 в различных вариантах групп I — IV

I. Варианты 1, 2 — указывается расстояние между двумя пунктами, расстояние от одного из пунктов до места встречи двух тел, движущихся из этих пунктов во встречном направлении, и время от начала движения до момента встречи (надо найти скорость одного из тел);

9, 10 — указывается разбиение всего пути движения на заданные части всего пути (надо найти длину пути);

15, 16 — указывается расстояние между двумя пунктами, расположенными по реке, скорость движения баржи и общее время движения баржи туда и обратно (надо найти скорость течения реки);

17, 18 — указывается расстояние между двумя пунктами, разность между скоростями движения мотоциклиста туда и обратно и разность между временем движения туда и обратно (надо найти скорость мотоциклиста в одном из направлений);

23, 24 — указывается длина состава поезда, время и скорость прохождения поезда вдоль платформы (надо найти длину платформы);

29, 30 — указывается расстояние между городами, путь, пройденный автомобилем за первый день (отмечается также, что в каждый последующий день пройденный путь увеличивался на одно и то же расстояние), количество дней на прохождение всего пути (надо найти путь, пройденный за один из дней);

37, 38 — указываются длины двух сухогрузов, движущихся в одном направлении с различными скоростями, расстояние между ними в некоторый момент, когда один находился позади другого, и расстояние между ними через указанное время, когда один стал впереди другого (надо найти разность скоростей сухогрузов);

39, 40 — указывается расстояние и время, за которое один гонщик обгоняет другого, движущегося с ним в одном направлении по кругу (надо найти скорость одного из гонщиков).

Материал для повторения: формулы расстояния S, пройденного с заданной скоростью v за время t ($S = v \cdot t$). Выражение a минут и a секунд в часах ($\frac{a}{60}$ и $\frac{a}{3600}$ соответственно). Формулы корней квадратного уравнения.

II. Варианты 11, 12 — указывается разность между временем выполнения одной и той же работы двумя субъектами с разной, указанной в условии производительностью (надо найти объём выполненной работы);

19, 20 — указывается разность между производительностями работ двух субъектов и разность между временем выполнения разного заданного объёма работ каждым субъектом (надо найти производительность одного из субъектов);

21, 22 — указывается время выполнения работы одновременно двумя субъектами совместно и время выполнения одним из них отдельно (надо найти время выполнения работы другим из субъектов);

25, 26 — указывается время выполнения некоторой работы любой парой из трёх рабочих (надо найти время выполнения работы одновременно тремя рабочими);

33, 34 — указывается весь объём работ и время, за которое рабочий выполнит работу, если увеличит производительность на заданное в условии число от планируемой производительности (надо найти плановую производительность);

Материал для повторения: формулы работы A, выполненной с заданной производительностью p за время t ($A = p \cdot t$). Выражение a минут и a секунд в часах ($\frac{a}{60}$ и $\frac{a}{3600}$ соответственно). Формулы корней квадратного уравнения.

III. Варианты 3, 4 — указываются объёмы и концентрации двух растворов одного и того же вещества (надо найти концентрацию раствора, получившегося при их смешивании);

5 — указывается концентрация и объём смеси, получившейся в результате смешивания двух растворов некоторого вещества с заданной концентрацией (надо найти объём одного из смешиваемых растворов);

6 — указывается объём куска сплава двух металлов и процентное содержание первого из них в сплаве (требуется найти объём второго металла, который надо добавить к сплаву, чтобы процентное содержание первого металла в получившемся сплаве было равно заданному в условии проценту).

Материал для повторения: понятие концентрации вещества в растворе и процентного содержания в сплаве. Понятие процента от числа.

IV. Варианты 7, 8 — указывается некоторая сумма, которая при её уменьшении (или увеличении) по правилу сложных процентов указанному в условии числу раз становится равной заданной в условии сумме (надо найти, на сколько процентов уменьшалась (или увеличивалась) эта сумма);

13, 14 — указывается уставной капитал компании в рублях, который образовался от вкладов четырёх фирм из указанных в условии частей, выраженных в процентах или долях от уставного капитала, и доход в рублях, который компания получила за год (надо найти, сколько рублей получит каждая из фирм при делении получившейся за год прибыли пропорционально внесённому вкладу);

27, 28 — указывается процентное содержание воды в свежем инжире и в сушёном инжире (надо найти, сколько килограммов свежего инжира потребуется для получения заданного числа килограммов сушёного инжира)

31, 32 — указываются две суммы, которые при их увеличении по правилу сложных процентов указанному в условии числу раз для каждой суммы становятся равными заданным в условии задачи двум новым суммам (надо найти, на сколько одна из полученных сумм больше другой);

35, 36 — указывается, что при увеличении одного из трёх чисел на заданное в условии задачи число процентов их сумма также увеличивается на указанное в условии число процентов, а при уменьшении другого числа на заданное в условии число процентов их сумма также уменьшается на указанное в условии число процентов (надо найти, сколько процентов от суммы составляет третье число).

Материал для повторения: понятие процента от числа. Правило увеличения или уменьшения числа на заданное число процентов. Формулы сложных процентов.

Решение большинства задач сводится к решению уравнения первой или второй степени с одной неизвестной или систем уравнений с двумя или тремя неизвестными. При решении заданий из вариантов 1, 2, 13, 14, 31, 32 можно обойтись без уравнений.

Замечания к решениям задач 12

Содержание задания 12 в варианте ЕГЭ-2016 по математике (профильный уровень) определяется в соответствии с обобщённым планом КИМ ЕГЭ-2016, в котором отмечается, что задание 12 включено с целью проверки умений устанавливать следующие свойства функции: монотонность; промежутки возрастания и убывания; чётность и нечётность; периодичность; точки экстремума (локальный максимум и минимум); наибольшее и наименьшее значение. Все эти свойства дифференцируемой функции $y = f(x)$, заданной на всей числовой прямой или на некотором промежутке (кроме чётности, нечётности и периодичности), можно устанавливать с помощью производной функции (хотя справедливо отметить, что иногда производную можно не применять) по известному алгоритму:

1. Находим производную $y = f'(x)$.

2. Находим точки, в которых производная обращается в ноль, решая уравнение $f'(x) = 0$ (во всех вариантах пособия множество таких точек конечно).

3. Отметим на всей числовой прямой или на заданном в условии промежутке все точки, в которых функция не определена (во всех вариантах пособия множество таких точек конечно) или её производная равна нулю.

4. Определяем знак производной на всех интервалах, на которые разбивается числовая прямая или заданный в условии промежуток точками, указанными в пункте 3 (для этого, как правило, достаточно определить знак в одной точке интервала).

5. По знаку производной на каждом интервале указываем поведение функции (возрастание или убывание).

6. Если при переходе (двигаясь по числовой прямой слева направо) через точку x_0, указанную в пункте 3 и в которой функция определена, производная меняет знак с «+» на «−», то точка x_0 является точкой максимума. Если же при переходе через точку x_0, указанную в пункте 3, в которой функция определена, производная меняет знак с «−» на «+», то точка x_0 является точкой минимума.

Во всех вариантах учебно-методического пособия «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2016. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии на 2016 год» в задании 12 требуется найти наибольшее или наименьшее значение функции, точку максимума или точку минимума функции.

В связи с этим отметим, что наибольшим значением функции, заданной на замкнутом отрезке $[a; ; b]$, будет наибольшее из всех значений функции в точках максимума и на концах промежутка (иногда находят значения функции во всех экстремальных точках и на концах промежутка, а затем находят наибольшее из полученных значений). В указанном пособии рассматриваются лишь такие функции и такие замкнутые промежутки, на которых функция имеет лишь одну точку, являющуюся точкой максимума, поэтому наибольшее значение будет в точке максимума.

Аналогично находится наименьшее значение функции на отрезке.

Заметим также, что в указанное учебное пособие включены задания на нахождение наибольшего или наименьшего значения функции, заданной на всей числовой прямой или полупрямой только для таких функций, которые имеют на них ровно одну экстремальную точку. Тогда значение в точке максимума будет наибольшим, а значение в точке минимума будет наименьшим.

В тех заданиях, где требуется найти точку максимума или минимума функции на некотором промежутке, условия составлены так, чтобы искомая экстремальная точка на этом промежутке была единственной.

Анализ содержания и методов решения задания 12 в различных вариантах

Задания 12, приведённые в вышеупомянутом пособии, естественно разбиваются на три группы в зависимости от вида промежутка, на котором рассматривается функция:

I. Вся числовая прямая (варианты: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 26, 29, 30, 37, 38);

II. Отрезок числовой прямой (варианты: 9, 10, 11, 12, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 27, 28, 31, 32, 39, 40);

III. Область определения функции или её часть, не совпадающая со всей числовой прямой и не являющаяся отрезком (варианты: 13, 14, 17, 18, 19, 20, 25, 33, 34, 35, 36).

Внутри каждой группы задания различаются постановкой задачи (найти наибольшее или наименьшее значение, точку максимума или минимума) и видом функций:

1) сложная функция, являющаяся композицией квадратичной и степенной функций;

2) сложная функция, являющаяся композицией квадратичной и показательной функций;

3) произведение линейной и показательной функций;

4) произведение квадратичной и показательной функций;

5) сложная функция, являющаяся композицией квадратичной и логарифмической функций;

6) произведение квадратичной и линейной функций;

7) частное линейной и квадратичной функций;

8) сумма степенной с рациональным показателем и линейной;

9) сумма линейной и логарифмической;

10) многочленом пятой степени;

11) сумма линейной и тригонометрической;

12) дробно-рациональной;

13) сумма квадратичной и логарифмической;

14) сумма линейной и степенной с отрицательным показателем.

Материал для повторения: основные правила дифференцирования (производная суммы и разности; производная произведения и частного, производная от константы, вынесение константы за знак производной); формулы производных основных элементарных функций (степенной, логарифмической, показательной, тригонометрических функций); правило нахождения производной сложной функции; нахождение значений основных элементарных функций; решение линейных и квадратных уравнений; знаки линейной и квадратичной функций на промежутках, образованных их корнями; области определения основных элементарных функций.

Замечания к решениям задач 13

Содержание задания 13 в варианте ЕГЭ-2016 по математике (профильный уровень) определяется в соответствии с обобщённым планом КИМ ЕГЭ-2016, в котором отмечается, что задание 13 включено с целью проверки умений решать уравнения и неравенства, указанные в КТ (кодификаторе требований к уровню подготовки выпускников) и КЭС (кодификаторе элементов содержания по математике для составления КИМ для ЕГЭ). В то же время для проверки умений решать неравенства выделяется отдельное задание 15. Тем самым задание 13 направлено на проверку умений решать различные уравнения, указанные в КТ и КЭС.

В учебно-методическом пособии «Математика. Подготовка к ЕГЭ 2016. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии на 2016 год» отражена имеющаяся тенденция включения в варианты ЕГЭ в виде отдельного задания тригонометрического уравнения или его комбинации с другими уравнениями:

тригонометрическое уравнение в комбинации с показательным уравнением — варианты 3, 4, 25*, 26, 37*, 38 ;

тригонометрическое уравнение в комбинации с логарифмическим уравнением — варианты 27 и 28;

тригонометрическое уравнение в комбинации с дробно-рациональным уравнением — варианты 19, 20, 39, 40;

тригонометрическое уравнение в комбинации с модулем — варианты 13*, 14, 15, 16, 33*, 34.

Варианты 1*, 2, 5*, 6 – 8, 9*, 10 – 12, 17*, 18, 21* – 24, 29* – 32 содержат тригонометрические уравнения в чистом виде, а варианты 35, 36 — показательные уравнения в чистом виде ($*$ отмечены варианты, решение которых приведено в основной книге).

В каждом варианте в задании 13 следует: а) указать формулы всех корней заданного уравнения; б) найти корни заданного уравнения, которые принадлежат указанному промежутку.

Анализ содержания и методов решения задания 13 в различных вариантах

I. Варианты 1, 2, 5, 6, 7, 8, 18, 21, 22, 23, 24.

Материал для повторения: формулы корней простейших тригонометрических уравнений: $\cos x = t, \sin x = t$ (условия существования корней), выражение $\cos 2x$ только через $\cos^2 x$ $(\cos 2x = 2\cos^2 x - 1)$, только через $\sin^2 x$ $(\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x)$ и одновременно через $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$ $(\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x)$. Формулы корней квадратного уравнения. Формулы приведения. Изображение чисел на числовой окружности.

а) Выражая $\cos 2x$ только через $\cos^2 x$ или через $\sin^2 x$ и применяя формулы приведения, сводим заданное уравнение к квадратному уравнению относительно $\cos x$ или $\sin x$.

Для каждого корня t_i $(i = 1, 2)$ этого квадратного уравнения решаем по известным формулам соответствующее тригонометрическое уравнение $\cos x = t_i$ или $\sin x = t_i$.

б) Находим корни уравнения, которые содержатся в заданном промежутке с помощью числовой окружности, следующим образом:

1. Жирной дугой выделяем ту часть числовой окружности, которая состоит из точек, соответствующих числам заданного в условии промежутка.

2. Отмечаем на этой жирной дуге те точки, которые соответствуют корням заданного уравнения. Отмеченные точки также сделаем жирными.

3. Определяем теперь, каким числам из заданного промежутка соответствуют эти жирные точки.

II. Варианты 9, 11, 29, 30.

Материал для повторения: формулы корней простейших тригонометрических уравнений: $\operatorname{tg} x = t, \operatorname{ctg} x = t$, выражение $\sin 2u$ через $\cos u$ и $\sin u$ $(\sin 2u = 2\sin u\cos u)$, основное тригонометрическое тождество. Таблица арктангенсов. Однородные тригонометрические уравнения второй степени. Формулы корней квадратного уравнения. Изображение чисел на числовой окружности.

а) Выражая $\sin 2u$ через $\cos u$ и $\sin u$ и применяя основное тригонометрическое тождество $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$, получаем однородное тригонометрическое уравнение второй степени:

$A\cos^2 u + B\cos u \cdot \sin u + C\sin^2 u = 0$, где A, B и C — произвольные действительные числа. Делим обе части уравнения на $\cos^2 u$, получим квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} u$.

Для каждого корня t_i $(i = 1, 2)$ этого квадратного уравнения решаем по известным формулам соответствующее тригонометрическое уравнение $\operatorname{tg} u = t_i$.

б) В вариантах 9, 10 концы промежутка, в котором надо указывать корни уравнения, задаются целыми числами. Пользуясь приближённым равенством $1 \approx \frac{\pi}{3}$, можно перейти к их выражению через число π. Например, промежуток $[0; 1] \approx \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, $[-1; 8] \approx \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right]$.

Учитывая, что корни уравнения будут выражаться через арктангенс, необходимо также знать таблицу арктангенсов и область значений арктангенсов.

В вариантах 29, 30, 31, 32 находим корни уравнения, которые содержатся в заданном промежутке с помощью числовой окружности.

III. Варианты 3, 4, 37*, 38.

Материал для повторения: понятие степени с целым показателем и её свойства. Выражение $\cos 2x$ только через $\cos^2 x$, только через $\sin^2 x$ и одновременно через $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$, выражение $\sin 2x$ через $\cos x$ и $\sin x$. Формулы корней квадратного уравнения.

а) Левую и правую части заданного уравнения представляем в виде степени одного и того же числа. Приравнивая далее показатели степеней, получим тригонометрическое уравнение. Выражая $\sin 2x$ через $\cos x$ и $\sin x$, и $\cos 2x$ только через $\cos^2 x$, либо только через $\sin^2 x$, либо одновременно через $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$, получим тригонометрическое уравнение, которое решается методом разложения на множители или сводится к квадратному уравнению.

б) Находим корни уравнения, которые содержатся в заданном промежутке с помощью числовой окружности.

IV Варианты 13, 14, 15, 16, 33, 34.

Материал для повторения: понятие модуля. Совокупность систем уравнений и неравенств. Определение $\operatorname{tg} x$, формулы корней простейших тригонометрических уравнений. Однородное тригонометрическое уравнение первой степени.

а) Рассмотрим два возможных случая в вариантах 13, 14, 15, 16: $\cos x > 0$ ($\cos x < 0$); $\sin x > 0$ ($\sin x < 0$) и в вариантах 33, 34: $\cos x \geqslant 0$ ($\cos x < 0$); $\sin x \geqslant 0$ ($\sin x < 0$). Получим совокупность двух систем, равносильную заданному уравнению. В каждой из этих систем будет одно из указанных неравенств и одно тригонометрическое уравнение. В вариантах 13, 14, 15, 16 это уравнение будет простейшим тригонометрическим уравнением, а в вариантах 33, 34 это уравнение будет однородным тригонометрическим уравнением первой степени: $A\cos x + B\sin x = 0$, где A и B — произвольные действительные числа. Простейшее тригонометрическое уравнение решаем по формулам, а однородное тригонометрическое уравнение первой степени решаем делением обеих частей уравнения на $\cos x$ (получим линейное уравнение относительно $\operatorname{tg} x$).

б) Корни уравнения, принадлежащие заданному промежутку, находим с помощью числовой окружности. При этом в ответ включаем лишь те корни, которые удовлетворяют соответствующим неравенствам, входящим в систему.

V. Варианты 19, 20, 39, 40.

Материал для повторения: область определения дробно-рационального выражения. Метод решения дробно-рациональных уравнений.

4. Зак. № 82

Основное тригонометрическое тождество, формула синуса двойного аргумента.

а) В вариантах 19, 20 переносим все слагаемые в одну часть уравнения и приводим к общему знаменателю. Используя основное тригонометрическое тождество, получаем общий множитель в числителе. Вынося его за скобки, разложим числитель дроби на множители. Далее, приравнивая к нулю каждый сомножитель, на которые разложился числитель дроби, находим корни уравнения (при этом выбираем лишь те, при которых знаменатель дроби не равен нулю).

В вариантах 39 и 40 делаем замену и приходим к квадратному уравнению. Делая обратную замену, получим простейшее тригонометрическое уравнение.

б) В вариантах 19, 20 находим корни уравнения, которые содержатся в заданном промежутке с помощью числовой окружности.

В вариантах 39 и 40 изображаем корни на числовой окружности и определяем длину наименьшей дуги между различными точками, соответствующими корням, и расстояние между ними (это расстояние равно модулю разности абсцисс указанных точек).

VI. Варианты 27, 28.

Материал для повторения: определение логарифма. Равносильность уравнений. Формула синуса двойного угла. Решение уравнений методом разложения на множители. Формулы корней простейших тригонометрических уравнений.

а) Отметим, что уравнение $\log_a f(x) = b$, $a > 0, a \neq 1$ равносильно уравнению $f(x) = a^b$. Отсюда получаем равносильное заданному уравнению тригонометрическое уравнение. Переносим все слагаемые в левую часть уравнения и разлагаем её на множители. При этом применяем формулу синуса двойного угла. Приравнивая к нулю каждый из получившихся сомножителей, находим все корни заданного уравнения.

б) Находим корни уравнения, которые содержатся в заданном промежутке с помощью числовой окружности.

VII. Варианты 25, 26, 35, 36.

Материал для повторения: понятие степени и её свойства. Понятие логарифма и его свойства. Формулы корней квадратного уравнения. Формулы корней простейших тригонометрических уравнений.

а) В вариантах 25, 26 делим обе части уравнения на $2^{\cos x}$ или $3^{\sin 2x}$ соответственно. Получим квадратное уравнение относительно $2^{\cos x}$ или $3^{\sin 2x}$ соответственно. Для каждого корня t_i $(i = 1, 2)$ этого квадратного уравнения решаем соответствующее уравнение $2^{\cos x} = t_i$ или $3^{\sin 2x} = t_i$. Для этого запишем t_i в виде степени числа 2 или 3 соответственно и, как в пункте III, приравняем показатели соответствующих степеней. Получим простейшие тригонометрические уравнения.

В вариантах 35, 36 левая часть разлагается на множители $(4^x - 4)(2^x - 3)$ и $(9^x - 1)$ $(3^x - 4)$ соответственно. Приравнивая сомножители к нулю, пользуясь свойствами степени и логарифма, находим все корни.

б) В вариантах 25, 26 находим корни уравнения, которые содержатся в заданном промежутке с помощью числовой окружности.

В вариантах 35, 36 находим корни, принадлежащие заданному промежутку по свойствам степени и логарифма.

VIII. Варианты 10, 12, 17.

Материал для повторения: формулы корней простейших тригонометрических уравнений. Синус двойного угла.

а) Воспользуемся формулой синуса двойного угла. Затем переносим все слагаемые в одну часть уравнения и группируем их так, чтобы эта часть уравнения разлагалась на множители.

В варианте 10 получаем уравнение:
$2(\cos x - 2)\left(\sqrt{3}\cos x - \sin x\right) = 0$.

В варианте 12 получаем уравнение: $2(\sin x - 2)\left(\sqrt{3}\sin x + \cos x\right) = 0$.

В варианте 17 получаем уравнение: $\cos^2 3x\left(2\sin^2 3x - 1\right) = 0$.

Приравнивая сомножители к нулю, находим все корни.

Заметим, что уравнения $\cos x - 2 = 0$ и $\sin x - 2 = 0$ корней не имеют.

Уравнения $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0$ и $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$ являются однородными уравнениями первой степени и решаются делением обеих частей уравнения на $\cos x$ (получим линейное уравнение относительно $\operatorname{tg} x$).

б) Находим корни уравнения, которые содержатся в заданном промежутке, с помощью числовой окружности.

Замечания к решениям задач 14

Стереометрические задачи типа 14 требуют от учащихся знания основных понятий и теорем как стереометрии, так и планиметрии. Для решения подобных задач учащимся требуется развивать пространственное воображение с целью верного построения чертежа и его использования в дальнейших рассуждениях. Приведём краткую классификацию заданий 14 из книги «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2016. Профильный уровень.

40 тренировочных вариантов по демоверсии на 2016 год». Эта классификация основана на типах фигур, оговорённых в условии.

Тип фигуры	Номера вариантов
Пирамиды	1*, 2, 3, 4, 5*, 6, 7, 8, 15, 16, 17*, 18, 19, 20, 26, 33*, 34, 35, 36,
Параллелепипеды	13*, 14, 21*, 22, 23, 24, 25*, 27, 28
Треугольные и шестиугольные призмы	9*, 10, 11, 12, 29*, 30, 31, 32
Тела вращения	37*, 38, 39, 40

* Звёздочкой отмечены варианты, решение которых приведено в основной книге.

Задания этого типа разделены на два пункта, каждый из которых оценивается экспертами в 1 первичный балл (максимальная оценка эксперта на ЕГЭ составляет 2 первичных балла). В пункте а) сформулирован вопрос на построение или на доказательство. В пункте б) сформулирована вычислительная задача, тематика вопросов в которой достаточно разнообразна: нахождение расстояния от точки до плоскости, расстояния между скрещивающимися прямыми, расстояния между точками (длина отрезка), расстояния от прямой до плоскости, площади сечения, объёма пирамиды, угла между плоскостями, угла между скрещивающимися прямыми, отношения длин отрезков.

Решение должно быть полным и обоснованным. Если в пункте а) необходимо доказать какой-либо факт и учащийся не может справиться с данной частью задания, то целесообразно попытаться решить пункт б), считая а) доказанным. Успешное решение пункта б) в этом случае может принести 1 первичный балл.

Замечания к решениям задач 15

Задание типа 15 представляет собой неравенство, решение которого на ЕГЭ оценивается экспертами в 2 первичных балла. Классифицируем задания, помещённые в книге «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2016. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии на 2016 год», по виду выражений, входящих в неравенство.

Типы заданий	Номера вариантов
Неравенства, содержащие показательную функцию	1*, 2, 3, 4, 5*, 6, 7, 8, 15, 16, 19, 20, 25*, 26, 29*, 30, 31, 32, 33*, 34, 35, 36, 39, 40
Неравенства, содержащие логарифмы	9*, 10, 11, 12, 13*, 14, 15, 16, 17*, 18, 21*, 22, 23, 24, 27, 28, 29*, 30, 31, 32, 33*, 34, 37*, 38, 39, 40
Неравенства, содержащие иррациональные выражения	13*, 14, 33*, 34
Неравенства, содержащие выражения с модулем	25*, 26, 27, 28, 33*, 34

* Звёздочкой отмечены варианты, решение которых приведено в основной книге.

Учащийся вправе выбирать метод решения неравенства. Выделим некоторые методы.

1. Метод замены переменной.
2. Метод интервалов.
3. Метод рационализации (декомпозиции).
4. Функциональный метод.
5. Метод оценки.

Как правило, используется комбинация методов.

1. Метод замены переменной позволяет перейти к неравенству более простого вида, после решения которого следует вернуться к исходной переменной. Например, при решении неравенства из варианта 36 исходное неравенство $(4^x - 2^{x+1})^2 - 11 \cdot (4^x - 2^{x+1}) + 24 \geqslant 0$ после замены $t = (4^x - 2^{x+1})$ преобразуется к квадратному неравенству $t^2 - 11t + 24 \geqslant 0$. Метод замены переменной использован при решении неравенств из вариантов 1 – 8, 15 – 28, 35, 36, 39, 40.

2. Метод интервалов позволяет решать неравенства вида $f(x) \vee 0$, где $f(x)$ — кусочно-непрерывная функция, а знак $\vee$ подразумевает один из знаков: «$\leqslant$», «$\geqslant$», «$<$» или «$>$». В основе метода лежит следующая идея. Числовая ось значений переменной Ox точками разрыва и нулями функции $f(x)$ делится на непересекающиеся интервалы. Внутри каждого интервала знак функции не изменяется. Например, в варианте 23 вспомогательное неравенство $\dfrac{9t^2\left(t - \frac{5}{3}\right)}{t-3} \geqslant 0$ решается методом интервалов,

в результате получаются значения $t \leqslant \frac{5}{3}$ и $t > 3$. Метод интервалов применяется в вариантах 1 – 12, 17 – 28, 33, 34, 37, 38.

3. Метод рационализации (декомпозиции) заключается в следующем. Пусть в неравенстве $f(x) \vee 0$ функция $f(x)$ представляет собой произведение множителей. На ОДЗ множители заменяются более простыми, которые совпадают по знаку с исходными. Например, в варианте 34 первоначальное неравенство имеет вид $\frac{(5^x - 125)(\log_{x-1} x - \log_{x-1} 3)}{(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+10})(|x-8| - |x|)} \geqslant 0$. Множитель числителя $(5^x - 125) = (5^x - 5^3)$ на ОДЗ имеет тот же знак, что и $(x - 3)$, а множитель знаменателя $(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+10})$ на ОДЗ имеет тот же знак, что и $(x^2 + 2x) - (x^2 + 10) = 2x - 10$. Таким образом, на ОДЗ исходное неравенство равносильно неравенству $\frac{(x-3)(\log_{x-1} x - \log_{x-1} 3)}{(2x-10)(|x-8| - |x|)} \geqslant 0$. Аналогично преобразуются и другие множители в числителе и в знаменателе первоначального неравенства. В настоящем пособии и в основной книге метод рационализации применяется в вариантах 9–12, 33, 34, 37, 38. Более подробно с методом рационализации можно ознакомиться в книге **«Математика. Подготовка к ЕГЭ-2014: решаем задание С3 методом рационализации»**.

4. Функциональный метод основывается на использовании свойств функций, входящих в неравенство. Так, при решении неравенства из варианта 14 делается заключение о том, что для значений x из интервала $0 < x < \frac{1}{2}$ выполняется неравенство $\log_3 x < \log_3 \frac{1}{2}$ (в силу монотонного возрастания функции $y(x) = \log_3 x$). Иногда для решения неравенства требуется исследование функции с помощью производной. Например, при решении варианта 31 для доказательства вспомогательного неравенства $\log_3 x - 3^x < 0$ исследуется функция $f(x) = 3^x - x$. Функциональный метод применяется в вариантах 13, 14, 29 – 32. Однако неявно он используется и в других вариантах.

5. Метод оценки заключается в том, что решающий отдельно оценивает левую и правую части неравенства. Так, у неравенства из варианта 14 ОДЗ представляет собой два интервала, на каждом из которых справедливость и несправедливость исходного неравенства, преобразованного к виду $\log_3 x > 1 - \frac{3}{2x-1}$, доказывается с помощью метода оценки. На-

пример, для значений x из интервала $\left(\frac{1}{2};\ 1\right)$ производится заключение, что $\log_3 x > -1$, а $1 - \frac{3}{2x-1} < -2$. Следовательно, $\log_3 x > 1 - \frac{3}{2x-1}$. При решении варианта 31 доказывается вспомогательное неравенство $\log_3 x < 3^x$ при $x > 0$, а для этого, в свою очередь, доказываются неравенства $\log_3 x < x$ и $3^x > x$, то есть обе части оцениваются через x.

Замечания к решениям задач 16

Задача 16 по планиметрии относится к заданиям повышенного уровня сложности, поэтому предполагается, что если учащийся приступает к её решению, то он, как минимум, уверенно владеет основными геометрическими понятиями и их свойствами, знает основные методы и приёмы решения задач, а также умеет их комбинировать. Знания, проверяемые в этом задании, не выходят за рамки школьной программы по геометрии 7—9 классов, однако, чтобы успешно с ним справиться, надо иметь опыт решения базовых задач, проявить изобретательность, техническую грамотность.

Будем классифицировать задачи, представленные в книге, по основным методам их решения:

Метод решения	Номера вариантов
Метод дополнительных построений	1*, 2, 5*, 6, 7, 8,10, 11, 12, 17*, 18, 20, 26, 27,28, 35, 36, 38, 39, 40
Метод подобия	3, 4, 9*, 10, 11, 12, 22, 24, 28, 29*,30, 31,32, 33*, 34
Метод площадей	15, 16, 21, 22, 23, 24, 25*
Векторно-координатный метод	19
Метод геометрического видения (обычно не требуется дополнительных построений и вычислений)	13*, 14, 21*, 23, 26, 27, 33*, 34, 35, 36, 37*, 38, 39, 40

*Звёздочкой отмечены варианты, решение которых приведено в основной книге.

Отметим, что часто в процессе решения одной задачи мы переходим от одного метода к другому, например, применяем сначала метод геометрического видения, затем метод дополнительных построений. Именно поэтому в таблице одна и та же задача встречается в нескольких строках.

Что касается оформления, то требования к записи решения стандартные: если вводятся обозначения, то они должны быть отражены в рисунке или описаны, решение должно быть полным, обоснованным, изложение понятным.

Замечания к решениям задач 17

Задание типа 17 представляет собой текстовую задачу практической направленности — как правило, с экономическим сюжетом. Несмотря на то, что для её решения не требуется глубокое знание экономики и других наук, учащимся, претендующим на успешное выполнение этого задания, необходимо всё же владеть некоторыми базовыми понятиями, такими как кредит, вклад, процентная ставка, выручка, прибыль и т.п. Требуется составить математическую модель на основе общей финансовой грамотности, причём математический аппарат, используемый в последующем решении, не выходит за рамки основной школы. Подробнее с типами и способами решения экономических задач можно познакомиться в книге «Математика. ЕГЭ. Задача с экономическим содержанием».

Решение каждой задачи, как правило, можно разделить на следующие этапы.

1. Осмысление формулировки задачи, всех оговоренных условий.

2. Составление математической модели, выбор неизвестных (при необходимости).

3. Решение уравнения, неравенства, системы, нахождение наибольшего (наименьшего) значения, либо проведение последовательных вычислений без составления уравнения.

4. Вычисление по найденному значению неизвестной значение той величины, которая спрашивается в условии (при необходимости).

Задания, представленные в книге «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2016. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии на 2016 год», можно классифицировать следующим образом.

Типы заданий	Номера вариантов
Кредиты с дифференцированными платежами	1*, 2, 5*, 6, 7, 8, 15, 16, 19, 20
Задачи на последовательное изменение величины на одно и то же значение	29*, 30, 31, 32, 39, 40
Кредиты с заданной схемой выплат	21*, 22, 23, 24
Вклады	9*, 10, 11, 12, 25*, 26, 27, 28
Задачи на соотношения	37*, 38
Задачи на целые числа	17, 18
Задачи на наибольшее и наименьшее значения	3, 4,13, 14, 25*, 26, 33*, 34, 35, 36

*Звёздочкой отмечены варианты, решение которых приведено в основной книге

Задачи на кредиты с дифференцированными платежами

Материал для повторения: арифметическая прогрессия, процент от числа, квадратные и линейные уравнения.

При решении указанных задач необходимо представлять схему расчёта по кредиту с дифференцированными платежами. Каждый расчётный период сначала банк начисляет проценты, тем самым увеличивая сумму долга клиента, а затем клиент вносит определённую сумму, уменьшая свой долг. По результатам этих операций каждый расчётный период сумма долга уменьшается на одну и ту же величину, а последовательные платежи по кредиту образуют убывающую арифметическую прогрессию.

Задачи на равномерное изменение величины

Материал для повторения: процент от числа, квадратные и линейные уравнения.

При решении задач данного типа следует учитывать, что некоторая величина последовательно изменяется, возрастая на определённое число процентов, а затем уменьшается каждый раз на одно и то же значение.

Задачи с заданной схемой выплат

Материал для повторения: процент от числа, квадратные и линейные уравнения.

При решении задач заданного типа надо использовать схему расчёта по кредиту, указанную в условии.

Задачи на целые числа

Материал для повторения: целые числа, делимость, наименьшее общее кратное (НОК), наибольший общий делитель (НОД), решение линейных уравнений и неравенств.

При решении подобных заданий требуется владеть понятиями наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя, а также уметь решать целочисленные неравенства, используя тот факт, что неравенства типа $x > 0{,}6$ и $x \geqslant 1$ имеют одинаковые целочисленные решения.

Вклады

Материал для повторения: решение линейных и квадратных уравнений и неравенств, процент от числа.

Эти задачи во многом аналогичны некоторым задачам на кредиты, но иногда требуют дополнительной смекалки.

Задачи на наибольшее и наименьшее значения

Материал для повторения: точки экстремума, производная функции, свойства квадратичной функции, свойства дробно-рациональной функции, свойства функции модуля.

При решении задач данного типа учащемуся необходимо искать наибольшее или наименьшее значение некоторой величины, используя производную либо тот факт, что квадратичная функции достигает своего экстремального значения в вершине параболы. При решении некоторых задач (варианты 13, 14) необходимо определять множество значений рациональной функции, для чего целесообразно привести её к виду $y(t) = a + \dfrac{1}{c(t+d)}$.

Задачи на соотношение

Материал для повторения: линейные уравнения, дроби, целое и части, процент от числа.

Некоторая величина распределена на 3 части в заданном соотношении. После изменения исходной величины на определённое число процентов указанное соотношение меняется, причём на это изменение накладываются дополнительные условия. Спрашивается, на сколько процентов изменилась одна из трёх частей. Задачи данного типа сводятся к решению линейных уравнений, которые возникают при составлении математической модели.

Замечания к решениям задач 18

Задания типа 18 относятся к заданиям высокого уровня сложности и требуют от учащегося глубокого владения математическим аппаратом, входящим в школьную программу, в том числе знанием свойств функций: чётности, нечётности, периодичности и т.д. При решении некоторых задач может потребоваться владение методами исследования функции с помощью производной. Как правило, задания типа 18 допускают несколько способов решения, которые могут использовать различные методы, специальные приёмы.

Использование нерационального способа решения не является основанием для снижения экспертной оценки на экзамене.

Методы решения задач типа 18 условно можно разделить на следующие группы:

1. Функционально-графический метод решения.
2. Геометрический метод решения.
3. Аналитический метод решения.

При решении конкретных задач обычно используется комбинация методов.

Материал для повторения: свойства функций, построение графиков, исследование функций с помощью производной.

Функционально-графический метод заключается в построении графиков функций, уравнений или неравенств, входящих в условие исходной задачи или полученных в результате преобразований. На основании графика учащийся делает определённые заключения, необходимые для решения задачи. В разных заданиях графики могут строиться в разных системах координат. Обычно по одной оси берётся значение независимой переменной (исходной или полученной в результате замены), по другой — значение функции, указанной в условии или преобразованной. При таком подходе различным значениям параметра соответствуют различные графики. В основной книге и этом пособии данным способом решены задачи вариантов 1 – 8 и другие. Стоит выделить метод, называемый координатно-параметрическим, при котором в качестве одной из осей выступает ось значений параметра, в качестве другой — ось значений переменной. В решениях координатно-параметрический метод используется в задачах вариантов 33 и 34.

При геометрических методах решения могут использоваться различные методы геометрии, в том числе дополнительные построения, теорема Пифагора, геометрические определения тригонометрических функций, методы аналитической геометрии и т.д. Геометрические методы могут сопровождать как графический, так и координатно-параметрический методы. В решениях, представленных в основной книге, а также в настоящем издании геометрический метод применятся, например, в задачах вариантов 19, 20, 21, 30, 31, 32, 37, 38, 39, 40.

В случае использования аналитического метода решения учащийся не прибегает к построению графика и все рассуждения проводит аналитически. В основной книге и настоящем пособии аналитическим методом решены задачи вариантов 9 – 18, 23 – 28.

Решение должно быть полным, обоснованным, изложение понятным.

Замечания к решениям задач 19

Задание 19 близко олимпиадной тематике, однако имеет свою специфику. В последние годы это задание обычно содержит в себе три подзадачи (пункты а), б) и в).

В пунктах а) и б), оцениваемых в 1 первичный балл каждый, традиционно предлагается решить несложную задачу на построение примера или строгое обоснование того, что требуемый пример построить нельзя. Как показывает практика, большинству школьников вполне под силу достичь успеха в решении подзадач пунктов а) и б) при условии, что они научатся внимательно читать и правильно понимать условие задачи. Часто эти пункты начинаются со слов: «Можно ли...». При этом существует две возможности:

— ответ в задаче — «да, можно», и тогда нужно построить пример и показать, что он удовлетворяет условию задачи;

— ответ в задаче — «нет, нельзя», и тогда нужно доказать, что нельзя.

Точно так же часто ответом на вопрос: «Всегда ли...» или «Всякий ли...» является конкретный пример, когда это условие не выполняется.

Пункт в), оцениваемый в 2 первичных баллах, немного сложнее. Его можно отнести к задачам, объединённым условным названием «оценка + пример». Как правило, в них требуется построение примера, обладающего в некотором смысле «экстремальными» характеристиками (например, задача на максимум или минимум выражения, принимающего дискретные значения), а также доказательство того, что именно этот пример, а не какой-то иной обладает данными характеристиками. Безосновательные ссылки на «невыгодность» других способов построения примера математически несостоятельны и не являются решением.

Задачи типа 19 обычно связаны с несколькими темами, поэтому при классификации возможно попадание той или иной задачи в несколько разделов.

Типы заданий	Номера вариантов
Среднее арифметическое и среднее геометрическое	1*, 2, 5*, 6, 7, 8, 19, 20, 21*, 22, 23, 24, 25*, 26, 27, 28, 35, 36
Арифметическая прогрессия	29*, 30, 31, 32, 35, 36
Геометрическая прогрессия	35, 36
Комбинаторика	9*, 10, 11, 12
Делимость	3, 4, 13, 14, 15, 16, 17*, 18, 37*, 38
Уравнения в целых числах	3, 4, 39, 40
Неравенства в целых числах	5*, 6, 7, 8, 37*, 38
Чётность — нечётность	33*, 34

* Звёздочкой отмечены варианты, решение которых приведено в основной книге.

Среднее арифметическое и среднее геометрическое

Материал для повторения: неравенство о средних.

Набирают популярность различные задачи на рейтинги, тестирование и т.д. Большинство из них так или иначе используют понятие и свойства среднего арифметического (реже среднего геометрического).

Некоторые свойства среднего арифметического чисел из некоторого набора A:

1. Если все числа набора A изменить на одно и то же число, то на это же число изменится и их среднее арифметическое.

2. Если все числа набора A умножить на одно и то же число, то на это же число умножится и их среднее арифметическое.

3. Сумма нескольких чисел равна произведению их среднего арифметического на количество этих чисел.

4. Среднее арифметическое не меньше минимума и не больше максимума, при этом равенство достигается только в случае, когда все числа равны между собой.

Арифметическая прогрессия

Материал для повторения: разность арифметической прогрессии, формула n-го члена арифметической прогрессии, сумма арифметической прогрессии, характеристическое свойство арифметической прогрессии.

Геометрическая прогрессия

Материал для повторения: знаменатель геометрической прогрессии, формула n-го члена геометрической прогрессии, сумма геометрической прогрессии, характеристическое свойство геометрической прогрессии.

Комбинаторика

Материал для повторения: правила суммы и произведения, перестановки, размещения и сочетания.

Особенностью задач вариантов 9 и 11 является наличие «поворотной симметрии», которая уменьшает число способов в 5 и 6 раз соответственно.

Делимость

Материал для повторения: простые и взаимно простые числа, основная теорема арифметики и количество делителей, наибольший общий делитель (НОД) и наименьшее общее кратное (НОК), десятичная форма записи натурального числа, признаки делимости, теорема о делении с остатком.

Уравнения в целых числах

Материал для повторения: уравнения первого и второго порядка в целых числах с двумя неизвестными (диофантовы уравнения), выделение полного квадрата, делимость, остатки.

Неравенства в целых числах

Материал для повторения: целая часть числа, дробная часть числа, сравнение дробей, оценки переменных, организация ограниченного перебора, задачи на нахождение экстремума, квадратный трёхчлен.

В вариантах 5 и 6 в пункте б) задача сводится к исследованию, имеют ли двойные неравенства $840 - 28k < 540 - 15k < 900 - 30k$ и $480 - 16k < 180 - 3k < 540 - 18k$ решения при натуральных значениях переменной k?

После преобразований было установлено, что оба неравенства равносильны следующей системе неравенств $\begin{cases} 13k > 300, \\ 15k < 360, \end{cases}$ которая не имеет решений в натуральных числах.

Чётность – нечётность

Материал для повторения: свойства суммы, разности и произведения чётных и нечётных чисел.

Задачи типа 19 на самом деле не обязательно являются сложными. Основной проблемой является непонимание школьниками вопроса задачи, т.е. что означает решить задачу и в каком виде должен быть дан ответ. Решение должно содержать не только сам (иногда числовой) ответ, но и логическую цепочку рассуждений, приводящих к данному ответу.

Теоретический материал, другие задания типа 19 и разнообразные олимпиадные задачи представлены в книгах:

С. В. Дерезин, Е. Г. Коннова. Математика. Подготовка к ЕГЭ: задание 21 профильного уровня. Задачи и решения / Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2015. — 80 с.

Е. Г. Коннова, В. А. Дрёмов, С. О. Иванов. Математика. 7 – 11 классы. Подготовка к олимпиадам: основные идеи, темы, типы задач / Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2015. — 224 с.

Е. А. Война, Б. И. Вольфсон, В. А. Дрёмов, С. О. Иванов, Г. Р. Саакян, Д. И. Ханин. Летняя математическая школа: теория, задания, математические бои, олимпиады, опыт организации / Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. О. Иванова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2013. — 288 с.

Глава II. Решения избранных вариантов

Решение варианта № 2

1. Пусть в школе x выпускников. Составим пропорцию

x — 100%

63 — 70%

Отсюда $x = \dfrac{63 \cdot 100}{70} = 90.$

Ответ: 90.

2. Так как среднесуточная скорость ветра указывается по вертикали, то ищем точку, ордината которой наибольшая. Это точка с координатами $(30; 20)$. Значит, наибольшая среднесуточная скорость ветра равна 20.

Ответ: 20.

3. Так как площадь треугольника равна половине произведения основания и высоты, то в качестве основания выберем вертикальную сторону треугольника, которая равна 5, а высота, проведённая к этому основанию, равна 12. Тогда площадь треугольника равна $\dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30.$

Ответ: 30.

4. Из 150 портфелей $150 - 6 = 144$ портфеля не имеют дефектов. Вероятность того, что портфель не имеет дефектов, равна $\dfrac{144}{150} = 0{,}96.$

Ответ: 0,96.

5. $4x^2 + 23x - 6 = 0;\ x_{1,2} = \dfrac{-23 \pm \sqrt{23^2 + 96}}{8} = \dfrac{-23 \pm 25}{8};\ x_1 = \dfrac{1}{4},$ $x_2 = -6$. Так как $x_1 > x_2$, то наибольший корень уравнения равен 0,25.

Ответ: 0,25.

6. Так как $\angle ACB$ и $\angle ACH$ смежные, то $\cos\angle ACB = -\cos\angle ACH$ (см. рис. 1).

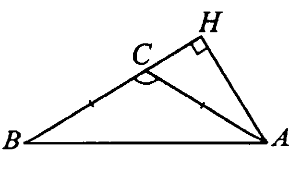


Рис. 1

В прямоугольном треугольнике ACH по теореме Пифагора найдём катет CH: $CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6.$

Тогда $\cos\angle ACH = \dfrac{CH}{AC} = 0{,}6$, $\cos\angle ACB = -0{,}6$.

Ответ: $-0{,}6$.

7. Согласно геометрическому смыслу производной $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол между касательной, проведённой к графику $f(x)$ в точке с абсциссой x_0, и положительным направлением оси Ox (см. рис. 2).

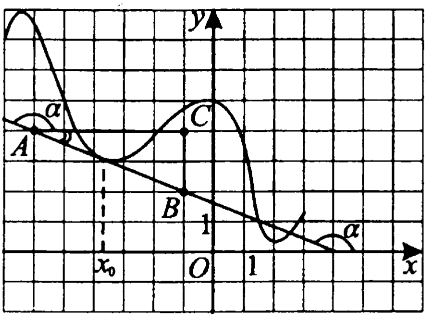


Рис. 2

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\pi - \angle BAC) = -\operatorname{tg}\angle BAC = -\frac{BC}{AC} = -\frac{2}{5} = -0{,}4.$$

Ответ: $-0{,}4$.

8. Из формулы объёма пирамиды $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot H$ вытекает, что объём правильного тетраэдра вычисляется по формуле $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$, где a — ребро тетраэдра. Так как объём прямо пропорционален a^3, то при увеличении ребра в 12 раз объём увеличится в 12^3 раз, то есть в 1 728 раз.

Ответ: 1 728.

9. Применим к произведению $(\sqrt{29} - \sqrt{9})(\sqrt{29} + \sqrt{9})$ формулу разности квадратов. Получим $(\sqrt{29} - \sqrt{9})(\sqrt{29} + \sqrt{9}) = 29 - 9 = 20$.

Ответ: 20.

10. Пусть h_0 — высота, на которой находится наблюдатель, $h = h_0 + \Delta h$ — высота, с которой наблюдатель видит горизонт на расстоянии 16 км. По условию $l_0 = 13{,}6$ км, $l = 16$ км, $R = 6400$ км. Так как $l_0 = \sqrt{\dfrac{Rh_0}{500}}$, то $h_0 = \dfrac{500 l_0^2}{R}$.

Тогда $l = \sqrt{\dfrac{R(h_0 + \Delta h)}{500}} = \sqrt{\dfrac{R\left(\dfrac{500l_0^2}{R} + \Delta h\right)}{500}}$. Отсюда

$500l^2 = 500l_0^2 + R\Delta h$, $\Delta h = \dfrac{500(l^2 - l_0^2)}{R} = \dfrac{500(16^2 - 13{,}6^2)}{6400} = 5{,}55$ (км).

Ответ: 5,55.

11. За 4 часа мотоциклист, выехавший из города A, проехал 200 км, следовательно, он ехал со скоростью $\dfrac{200}{4} = 50$ (км/ч).

Ответ: 50.

12. Так как функции $y = \sqrt{40 + 6x - x^2}$ и $y = 40+6x-x^2$ принимают наибольшие значения в одной и той же точке, то наибольшее значение исходная функция принимает в вершине параболы $y = -x^2+6x+40$, то есть при $x = -\dfrac{6}{2\cdot(-1)} = 3$. Таким образом, $y_{\text{наиб}} = \sqrt{40 + 6\cdot 3 - 3^2} = \sqrt{49} = 7$.

Ответ: 7.

13. а) Преобразуем уравнение

$2\cos^2 x - 1 - \sqrt{2}(-\cos x) - 1 = 0$,

$2\cos^2 x + \sqrt{2}\cos x - 2 = 0$.

Сделаем замену $\cos x = t$, получим $2t^2 + \sqrt{2}t - 2 = 0$.

$D = (\sqrt{2})^2 - 4\cdot 2\cdot(-2) = 18$.

$t_{1,2} = \dfrac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{18}}{4}$, $t_1 = \dfrac{-\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{4} = -\sqrt{2}$,

$t_2 = \dfrac{-\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Если $t = -\sqrt{2}$, то $\cos x = -\sqrt{2}$, корней нет.

Если $t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, то $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$, найдём с помощью окружности (см. рис. 3).

$\dfrac{\pi}{4} + 2\pi = \dfrac{9\pi}{4}$, $-\dfrac{\pi}{4} + 2\pi = \dfrac{7\pi}{4}$.

Ответ: а) $\pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$; б) $\dfrac{7\pi}{4}; \dfrac{9\pi}{4}$.

14. Прямая NM параллельна основанию ABC, поэтому α пересекает плоскость ABC по прямой $QR \parallel MN$ (см. рис. 4). Плоскость DEC пер-

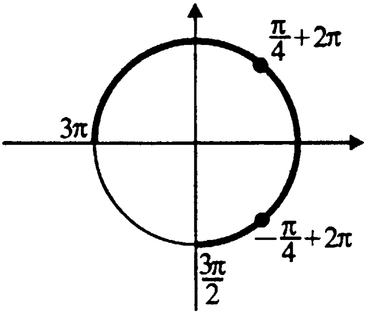


Рис. 3

пендикулярна плоскости основания. Обозначим через K точку пересечения DEC и MN, H — центр основания пирамиды, T — точку пересечения QR и EC.

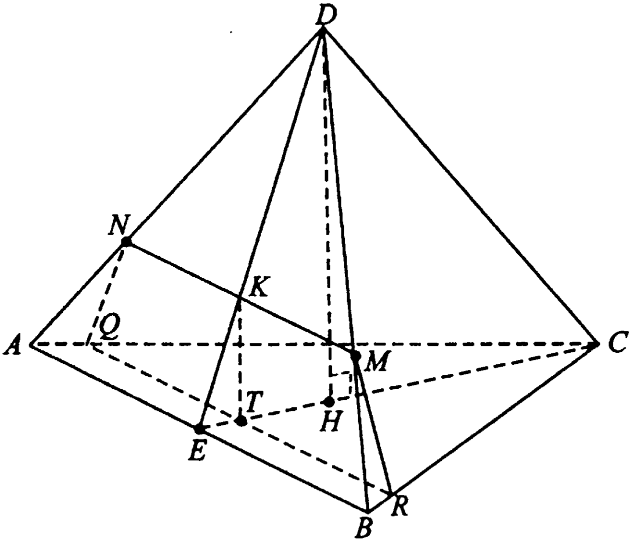


Рис. 4

Плоскости NMR и DEC перпендикулярны основанию пирамиды, значит, KT перпендикулярна основанию и тогда $KT \parallel DH$.

$MN \parallel AB$, значит, по теореме о пропорциональных отрезках $DN : NA = DK : KE = 2 : 1$ (угол ADE).

Аналогично $KT \parallel DH$ пересекают стороны $\angle DEH$, и $EK : KD = ET : TH = 1 : 2$. H — точка пересечения медиан $\triangle ABC$, CE — медиана и $CH : HE = 2 : 1$, поэтому $CT : TE = 8 : 1$.

б) $QNMR$ — трапеция. Из подобия $\triangle DNM$ и $\triangle DAB$ следует $DN : DA = MN : AB = 2 : 3$, $MN = \frac{2}{3}AB = 20$.

Из подобия $\triangle CQR$ и $\triangle CAB$ следует $QR : AB = CT : CE = \frac{8}{9}$.

$QR = \frac{8}{9}AB = \frac{80}{3}$.

Высота CE правильного $\triangle ABC$ равна $CE = CB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$,

$CH = \frac{2}{3}CE = 10\sqrt{3}$. Из $\triangle DHC$ получаем $DH = \sqrt{DC^2 - CH^2} = 10$,

тогда $KT = \frac{1}{3}DH = \frac{10}{3}$ — высота трапеции.

$$S_{QNMR} = \frac{NM + QR}{2} \cdot KT = \frac{700}{9} = 77\frac{7}{9}.$$

Ответ: $77\frac{7}{9}$.

15. Сделаем замену $11^x = t$, тогда $\frac{t}{t-11} + \frac{t+11}{t-3} + \frac{t+121}{t^2 - 14t + 33} \leqslant 0$.

$$\frac{t(t-3) + (t-11)(t+11) + t + 121}{(t-11)(t-3)} \leqslant 0,$$

$$\frac{t^2 - 3t + t^2 - 121 + t + 121}{(t-11)(t-3)} \leqslant 0,$$

$$\frac{2t^2 - 2t}{(t-11)(t-3)} \leqslant 0,$$

$$\frac{2t(t-1)}{(t-11)(t-3)} \leqslant 0.$$

Решим неравенство методом интервалов. Найдём ОДЗ: $(t-11)(t-3) \neq 0$, $t \neq 11$, $t \neq 3$. Найдём нули дроби: $2t(t-1) = 0$, $t = 0$, $t = 1$.

$0 \leqslant t \leqslant 1$ или $3 < t < 11$ (см. рис. 5).

При $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant 11^x \leqslant 1$, $11^x \leqslant 11^0$, $x \leqslant 0$.

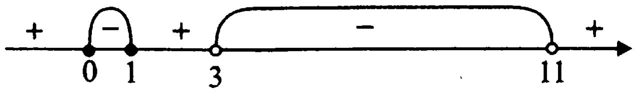


Рис. 5

При $3 < t < 11, 3 < 11^x < 11, \log_{11} 3 < x < 1$.

Ответ: $(-\infty; 0] \cup (\log_{11} 3; 1)$.

16. а) Пусть O и O_1 — центры большей и меньшей окружностей соответственно (см. рис. 6). Точки A, O и O_1 лежат на одной прямой, AO — диаметр, значит, $\angle OMA = \angle OKA = \angle OTA = 90°$. $\triangle OMA = \triangle OBM$ (по гипотенузе и катету), значит, $BM = MA$. Аналогично $\triangle OKA = \triangle OKC$ и K — середина AC. MK — средняя линия $\triangle ABC \Rightarrow MK \parallel BC$.

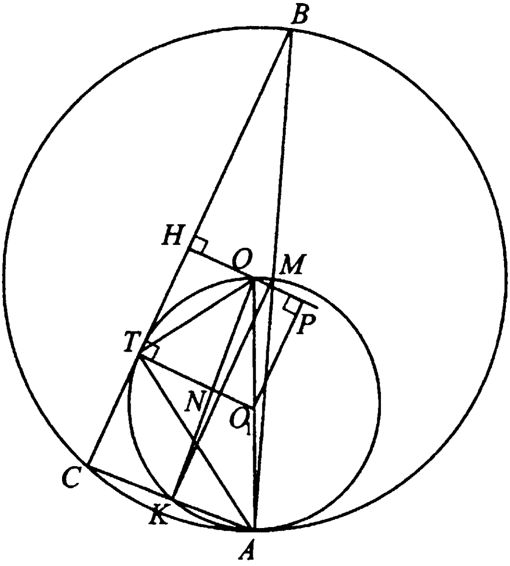


Рис. 6

б) Пусть $OH \perp BC$, тогда из $\triangle OBH$ получаем $OH^2 = OB^2 - BH^2$, $OH = \sqrt{41^2 - 40^2} = 9$. T — точка касания, значит, $O_1T \perp CB$, тогда $O_1T \parallel OH$ (как перпендикуляры к одной прямой).

Проведём $O_1P \perp OH$, O_1PHT — прямоугольник, $O_1T = PH$.

$OP = HP - OH = TO_1 - OH = \frac{AO}{2} - OH = \frac{41}{2} - 9 = \frac{23}{2}$.

$$PO_1 = \sqrt{O_1O^2 - OP^2} = \sqrt{\left(\frac{41}{2}\right)^2 - \left(\frac{23}{2}\right)^2} = 12\sqrt{2},$$

$TH = PO_1 = 12\sqrt{2}$.

Получаем из $\triangle OHT$: $OT^2 = OH^2 + HT^2 = 9^2 + (12\sqrt{2})^2 = 369$.

В $\triangle ATO$ получим $AT^2 = AO^2 - OT^2 = 41^2 - 369 = 1\,312$, $AT = 4\sqrt{82}$.

$MK \parallel BC, BM = MA \Rightarrow AN = NT = \frac{1}{2}AT = \frac{4\sqrt{82}}{2} = 2\sqrt{82}$.

Ответ: $2\sqrt{82}$.

17. Пусть сумма кредита равна A. После выплаты клиента долг уменьшается на одинаковую сумму, через 25 лет он станет 0, значит, после 1-й выплаты он уменьшится на $\frac{A}{25}$ и станет $\frac{24A}{25}$, после 2-й — $\frac{23A}{25}$, ..., после 24-й — $\frac{A}{25}$, после 25-й — 0.

Если долг увеличится на $a\%$, то сумма долга вырастет в $q = \frac{100 + a}{100}$ раз. Значит, 30-го января долг станет равен $A \cdot q$, через год — $\frac{24A}{25} \cdot q$, через 2 года — $\frac{23A}{25}q$, ..., через 24 года — $\frac{A}{25}q$.

Выплаты — разность между суммой долга до и после выплаты клиента, то есть в первый месяц $A \cdot q - \frac{24A}{25}$, во второй месяц $\frac{24A}{25}q - \frac{23A}{25}$, ..., в предпоследний месяц $\frac{2A}{25}q - \frac{A}{25}$, в последний $\frac{A}{25}q - 0$. Всего следует выплатить $Aq - \frac{24A}{25} + \frac{24A}{25}q - \frac{23A}{25} + \ldots + \frac{2A}{25}q - \frac{A}{25} + \frac{A}{25}q - 0$, что по условию равно $1{,}65A$.

$$Aq\left(1 + \frac{24}{25} + \frac{23}{25} + \ldots + \frac{1}{25}\right) - A\left(\frac{24}{25} + \frac{23}{25} + \ldots + \frac{1}{25}\right) =$$

$$= A\left(1 + \frac{24}{25} + \frac{23}{25} + \ldots + \frac{1}{25}\right)(q - 1) + A = A + A(q - 1)\frac{(25 + 1) \cdot 25}{25 \cdot 2} =$$

$$= A + A(q - 1) \cdot 13 = A(1 + (q - 1) \cdot 13) = 1{,}65A.$$

$1 + (q - 1) \cdot 13 = 1{,}65$, $(q - 1) \cdot 13 = 0{,}65$, $q - 1 = 0{,}05$, $q = 1{,}05$, $a = 5$.

Ответ: $a = 5$.

18. Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы.

1) Если $y + x + 2 \geqslant 0$, то получим уравнение
$x^2 + 8y + y^2 - 8y - 8x - 16 = 4$,
$x^2 + y^2 - 8x = 20$,
$y^2 + (x - 4)^2 = 36$.

Полученное уравнение задаёт окружность с центром $A(4; 0)$ и радиусом 6.

2) Если $y + x + 2 \leqslant 0$, то получим уравнение
$x^2 + 8y + y^2 + 8y + 8x + 16 = 4$,
$x^2 + 8x + y^2 + 16y = -12$,
$(x + 4)^2 + (y + 8)^2 = -12 + 16 + 64$,
$(x + 4)^2 + (y + 8)^2 = 68$.

Полученное уравнение задаёт окружность с центром $B(-4; -8)$ и радиусом $\sqrt{68}$.

Полученные окружности пересекаются в точках $N(4; -6)$ и $M(-2; 0)$, которые лежат на прямой $y + x + 2 = 0$, и мы получаем две дуги ω_1 и ω_2 с концами в этих точках (см. рис. 7).

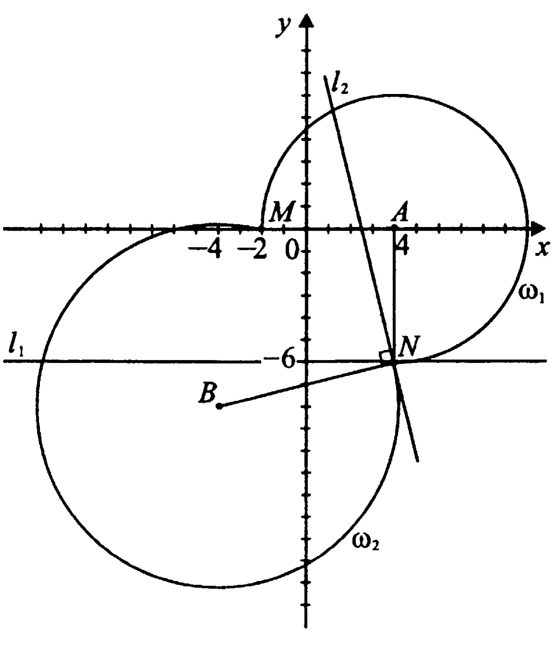


Рис. 7

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно задаёт прямую, проходящую через точку $N(4; -6)$.

При $a = 0$ прямая l_1 проходит через N и $l_1 \perp AN$, значит, l_1 касается ω_1 и пересекает ω_2 в N и ещё одной точке, то есть система имеет 2 решения.

Найдём a, при котором прямая l_2 проходит через N и $l_2 \perp BN$. Прямые перпендикулярны, если произведение их угловых коэффициентов равно -1. $K_{BN} = \frac{1}{4}$, $K_{BN} \cdot a = -1$, $a = -4$.

При $a = -4$ прямая l_2 касается ω_2 и пересекает ω_1 в точке N и ещё одной точке, при этом система имеет 2 решения.

При $a < -4$ прямая пересекает каждую из дуг в двух точках, одна из которых N, значит, система имеет 3 решения.

При $a > 0$ аналогично в системе 3 решения.

При $-4 < a < 0$ система имеет ровно 2 решения.

Таким образом, ровно 2 различных решения система имеет при $-4 \leqslant a \leqslant 0$.

Ответ: $[-4; 0]$.

19. а) Пусть тестировались трое участников, набравших 20, 44 и 60 баллов. Средний балл не сдавших тест равен $(20 + 44) : 2 = 32$ балла. После прибавления баллы стали 27, 51 и 67. Средний балл несдавших стал равен 27, он понизился.

б) Рассмотрим пример пункта а). Средний балл сдавших стал равен $(51 + 67) : 2 = 59$, что меньше среднего балла сдавших до прибавления, который был равен 60.

в) Пусть в тестировании принимало участие N участников, не сдали тест k участников, после добавления баллов не сдали тест p участников.

Пусть $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_N$ — баллы участников, тогда $a_k < 45$, $a_{k+1} \geqslant 45$, $a_p + 7 < 45$, $a_{p+1} + 7 \geqslant 45$.

Средний балл до добавления:

несдавших $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} = 30$,

сдавших $\frac{a_{k+1} + \ldots + a_N}{N - k} = 55$,

всех участников $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_N}{N} = 45$.

Тогда $30k + 55(N - k) = 45N$, $30k + 55N - 55k - 45N = 0$, $10N = 25k$, $2N = 5k$.

Так как k и N целые, то N делится на 5.

Аналогично после добавления получим

$32p + 60(N - p) = 52N$,

$28p = 8N$, $7p = 2N$, N делится на 7.

N делится на 7 и на 5. Значит, N делится на 35.

Пример для 35 участников.

10 человек получили по 25 баллов, 2 получили по 42 баллов, 2 — по 43, 21 — по 55 баллов.

Средний балл у первоначально несдавших — $(10 \cdot 25 + 2 \cdot 42 + 2 \cdot 43) : 14 = 30$ баллов.

Средний балл у тех, кто не сдал после повышения, — 32 балла.

Средний балл у сдавших — $(2 \cdot 49 + 2 \cdot 50 + 21 \cdot 62) : 25 = 60$ баллов.

Условия выполнены.

Ответ: а) да, б) да, в) 35.

Решение варианта № 3

1. На 9 недель понадобится $1700 \cdot 9 = 15\,300$ листов бумаги. Так как в пачке 500 листов, то понадобится $15\,300 : 500 = 30{,}6$ пачек бумаги. Значит, хватит 31 пачки.

Ответ: 31.

2. Выбираем точку с наименьшей ординатой. Наименьшая цена 189 рублей была 24 января.

Ответ: 24.

3. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$ (см. рис. 8).

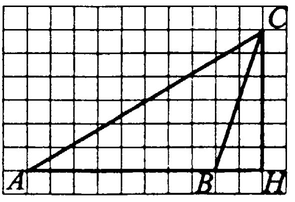


Рис. 8

Ответ: 24.

4. В партии 2472 исправных и 28 неисправных насосов. Всего $2472 + 28 = 2500$ насосов в партии. Вероятность того, что случайно выбранный насос окажется неисправным, равна $\frac{28}{2500} = 0{,}0112$.

Ответ: 0,0112.

5. $\dfrac{1}{7x-23}=\dfrac{1}{33}$; $7x-23=33$; $7x=56$; $x=8$.

Ответ: 8.

6. 1) Так как $\operatorname{tg} A = 3 = \dfrac{BC}{AC}$, то $BC = 3AC$ (см. рис. 9). По теореме Пифагора $BC^2+AC^2=AB^2$; $9AC^2+AC^2=144$; $AC^2=\dfrac{144}{10}$; $AC=\dfrac{12}{\sqrt{10}}$.

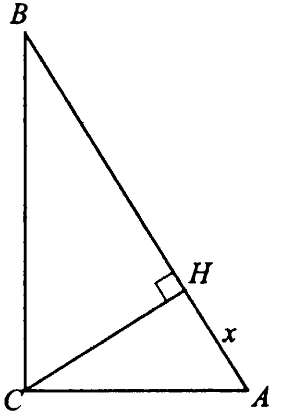


Рис. 9

2) Из формулы $1+\operatorname{tg}^2 A = \dfrac{1}{\cos^2 A}$ получим $\cos A = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

3) Пусть $x = AH$. Тогда из $\triangle ACH$ следует $\dfrac{x}{AC}=\cos A$;

$x = AC\cdot\cos A = \dfrac{12}{\sqrt{10}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{10}} = 1{,}2$.

Ответ: 1,2.

7. Согласно геометрическому смыслу производной $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$ (см. рис. 10).

Из прямоугольного треугольника ABC получим

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{7}{5} = 1{,}4$.

Ответ: 1,4.

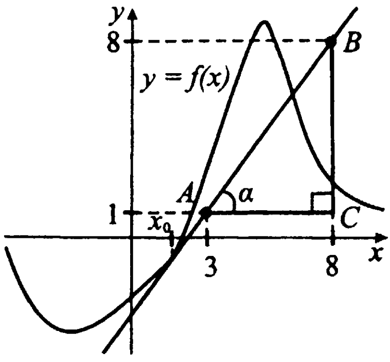


Рис. 10

8. Объём конуса вычисляется по формуле $V_{\text{К}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot h$. Объём конуса прямо пропорционален высоте. Так как высота уменьшится в 17,1 раза, то и объём уменьшится в 17,1 раза.

Ответ: 17,1.

9. $\frac{4^{7,8} \cdot 9^{8,8}}{36^{8,8}} = \frac{4^{7,8} \cdot 9^{9,8}}{4^{8,8} \cdot 9^{8,8}} = 4^{7,8-8,8} \cdot 9^{9,8-8,8} = 4^{-1} \cdot 9 = \frac{9}{4} = 2{,}25.$

Ответ: 2,25.

10. По условию $r_{\text{пок}} = 0{,}84$, $r_{\text{экс}} = 0{,}24$, $k = 13$.

Тогда $m = \frac{0{,}04 \cdot 13}{0{,}84 + 0{,}2} = \frac{0{,}52}{1{,}04} = \frac{52}{104} = 0{,}5.$

Значит, $R = 0{,}84 - \frac{0{,}84 - 0{,}24}{(13+3)^{0,5}} = 0{,}84 - \frac{0{,}6}{\sqrt{16}} = 0{,}84 - 0{,}15 = 0{,}69.$

Ответ: 0,69.

11. В трёх литрах 12%-го водного раствора $3 \cdot 0{,}12 = 0{,}36$ л сухого вещества. В пяти литрах 20%-го раствора $5 \cdot 0{,}2 = 1$ л сухого вещества. В 8 литрах получившегося раствора 1,36 л сухого вещества.

Составим пропорцию:

8 л — 100%

1,36 л — x%,

где x — концентрация получившегося раствора в процентах.

Тогда $x = \frac{136}{8} = 17$ (%).

Ответ: 17.

12. Наименьшее значение функция $y = 2^{x^2+100x+2503}$ принимает в той же точке, что и функция $y = x^2 + 100x + 2503$, то есть в точке $x = -\dfrac{100}{2 \cdot 1} = -50$.

Тогда $y_{\text{наим}} = 2^{(-50)^2+100\cdot(-50)+2503} = 2^{2500-5000+2503} = 2^3 = 8$.

Ответ: 8.

13. а) Преобразуем уравнение $\left(11^{-2}\right)^{\cos x} = 11^{2\sin 2x}$.

$-2\cos x = 2\sin 2x$, $\cos x + \sin 2x = 0$, $\cos x + 2\sin x \cos x = 0$, $\cos x(1 + 2\sin x) = 0$.

Если $\cos x = 0$, то $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

Если $1 + 2\sin x = 0, \sin x = -\dfrac{1}{2}$, то $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\dfrac{\pi}{2}\right]$, найдём с помощью окружности (см. рис. 11).

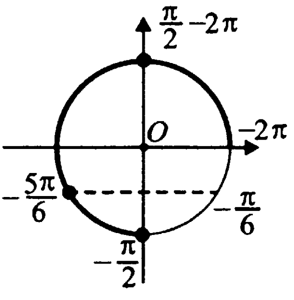


Рис. 11

$x = -\dfrac{\pi}{2}, x = -\dfrac{3\pi}{2}, x = -\dfrac{5\pi}{6}$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k$, $-\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k, n \in Z$; б) $-\dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{3\pi}{2}$, $-\dfrac{5\pi}{6}$.

14. Прямая PT параллельна BC как средняя линия треугольника SBC и, значит, PT параллельна плоскости основания ABC, поэтому сечение пересекает плоскость основания по некоторой прямой RQ, параллельной PT (см. рис. 12).

$PK \parallel SH$, так как, если предположить, что это не так, то тогда SH и плоскость α будут иметь общую точку, а это противоречит условию. Значит, $PK \perp ABC$, так как $SH \perp ABC$.

Следовательно, $\Delta PKB \sim \Delta SHB$ (оба прямоугольные и имеют общий острый угол при вершине B).

Значит, $BK = \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}BB_1 = \frac{1}{3}BB_1$ (так как H — точка пересечения медиан ΔABC), то есть $BK : KB_1 = 1 : 2$.

б) По теореме Пифагора $B_1H = \sqrt{B_1S^2 - SH^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$.
$BK = \frac{1}{3}BB_1 = B_1H = 16$.

Так как плоскости α и ABC перпендикулярны, расстояние от точки B до плоскости α лежит в плоскости основания (на рисунке 12 это отрезок BF) и $BF = BK \sin \angle BKF = BK \sin 30° = 8$.

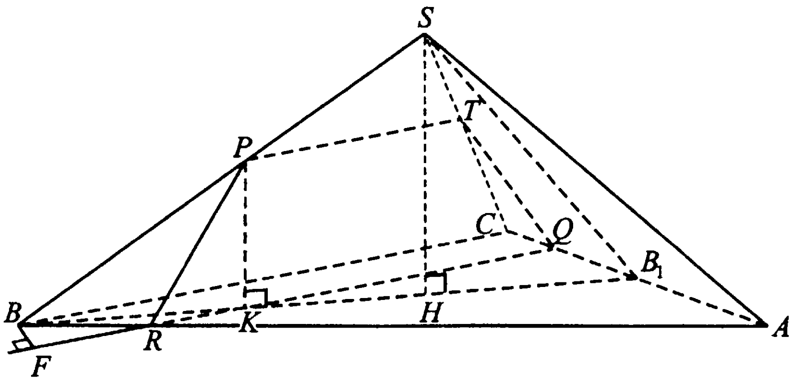


Рис. 12

Ответ: 8.

15. Преобразуем неравенство, сделав замену $4^x = t$.

$$\frac{0{,}25t + 60}{4t^2 - 65t + 16} + \frac{1}{4} \geqslant 0, \quad \frac{(t-8)^2}{4t^2 - 65t + 16} \geqslant 0.$$

Решим неравенство методом интервалов (см. рис. 13).

Найдём нули числителя и знаменателя $t - 8 = 0,\ t = 8$.

$4t^2 - 65t + 16 = 0,\ t = \frac{1}{4},\ t = 16.$

$t < \frac{1}{4},\ t = 8,\ t > 16.$

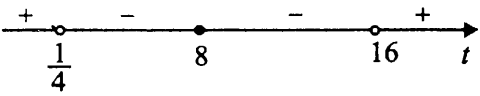


Рис. 13

При $t < \frac{1}{4}$ получим: $4^x < \frac{1}{4}$, $4^x < 4^{-1}$, откуда $x < -1$.

При $t = 8$ получим: $4^x = 8$, $2^{2x} = 2^3$, откуда $x = \frac{3}{2}$.

При $t > 16$ получим: $4^x > 16$, откуда $x > 2$.

Решение исходного неравенства: $x \in (-\infty; -1) \cup \left\{\frac{3}{2}\right\} \cup (2; +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup \left\{\frac{3}{2}\right\} \cup (2; +\infty)$.

16. а) CK и BH — биссектрисы равнобедренных треугольников, проведённые к основанию, они являются медианами и высотами (см. рис. 14). Пусть эти биссектрисы пересекаются в точке E (пока не обязательно эта точка лежит на AD). Получаем $CK \perp PD$, $PK = KD$, значит, $EP = ED$ и $BH \perp PA$, $AH = HP$, значит, $EP = EA$.

$EP = ED = EA$, поэтому E — центр описанной около прямоугольного треугольника APD окружности, который лежит на середине гипотенузы AD.

б) В четырёхугольнике $PKEH$ $\angle P = \angle K = \angle H = 90°$, значит, $\angle HEK = 90°$, $PKEH$ — прямоугольник.

$S_{PKEH} = PK \cdot PH = 20$.

$PD = 2PK, PA = 2PH$. $S_{PDA} = \frac{1}{2}PD \cdot PA = \frac{2PK \cdot 2PH}{2} = 40$.

$\triangle BPH \sim \triangle PCK$ по двум углам, $\angle H = \angle K = 90°$, $\angle 1 = \angle 2$ как соответственные при $PK \parallel BE$ и секущей BC.

$PC : BP = PK : BH = CK : PH = 5 : 2$.

Пусть $PK = 5x, CK = 5y$, тогда $BH = 2x$, $PH = 2y$.

$S_{PKEH} = 5x \cdot 2y = 20$, $xy = 2$.

$S_{BHA} = S_{BPH} = \frac{1}{2}2x \cdot 2y = 2xy = 4$.

$S_{CDK} = S_{CPK} = \frac{1}{2}5x \cdot 5y = 12{,}5xy = 25$.

$S_{ABCD} = S_{PDA} + 2S_{BPH} + 2S_{CPK} = 40 + 8 + 50 = 98$.

Ответ: 98.

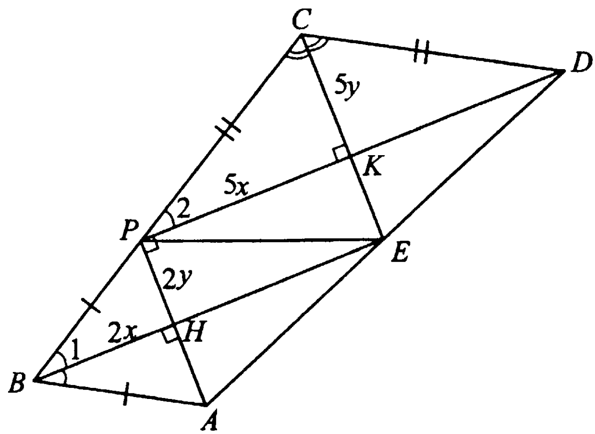


Рис. 14

17. Обозначим прибыль издательства (в тысячах рублей) за один год $f(x) = ax - (x^2 + 6x + 22\,100)$.

Найдём, при каких условиях данная функция принимает наибольшее значение. Квадратичная функция $f(x) = -x^2 - (6-a)x - 22\,100$ принимает наибольшее значение при $x = \dfrac{6-a}{-2} = \dfrac{a-6}{2}$.

Чтобы разработка учебника окупилась не более, чем за два года, необходимо выполнение условия $2f(x) \geqslant 800$, то есть $-x^2 - (6-a)x - 22\,100 \geqslant 400$.

Так как $x = \dfrac{a-6}{2}$, получим $-\left(\dfrac{a-6}{2}\right)^2 - (6-a)\dfrac{a-6}{2} - 22\,100 \geqslant 400$, то есть $\dfrac{(a-6)^2}{4} \geqslant 22\,500$, $(a-6)^2 \geqslant 90\,000$, тогда получаем $a - 6 \leqslant -300$ или $a - 6 \geqslant 300$. Наименьшая цена будет при $a - 6 = 300$, то есть $a = 306$.

Ответ: 306.

18. Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют второму уравнению системы.

Если $x^2 - 2x - 8 \geqslant 0$ (данному неравенству удовлетворяют все точки с абсциссами $x \leqslant -2$, $x \geqslant 4$), то получим уравнение $y^2 - 2x - 8 = x^2 - 2x - 8$, $y^2 = x^2$.

Полученное уравнение задаёт прямые $y = -x$ и $y = x$. Учитывая условие $x^2 - 2x - 8 \geqslant 0$, получаем 4 луча с началами в точках $A(-2; 2)$, $B(-2; -2)$, $C(4; 4)$ и $D(4; -4)$ (см. рис. 15).

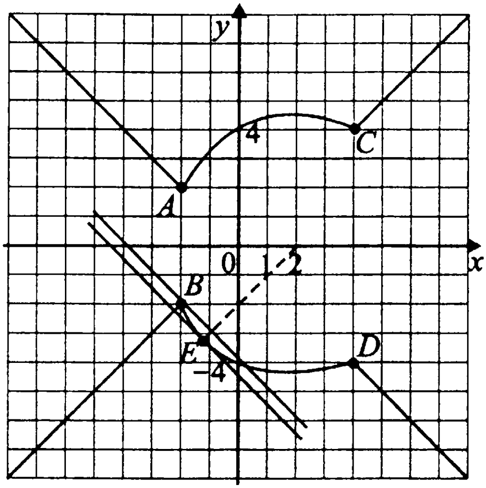


Рис. 15

Если $x^2-2x-8 \leqslant 0$ (это точки с абсциссами $-2 \leqslant x \leqslant 4$), то получаем уравнение $y^2 - 2x - 8 = -(x^2 - 2x - 8)$, $y^2 + x^2 - 4x - 16 = 0$, $y^2 + (x-2)^2 = 20$. Полученное уравнение задаёт окружность с центром $(2; 0)$ и радиусом $\sqrt{20}$.

Учитывая условие $x^2-2x-8 \leqslant 0$, получим две дуги с концами в точках A, C, B и D.

Рассмотрим второе уравнение системы $x + y = a$. Оно при каждом значении a задаёт прямую, проходящую через точку $(0, a)$, при этом все такие прямые параллельны между собой.

При $a = 0$ прямая проходит через точки A и D и исходная система имеет бесконечно много решений. При $-4 < a < 0$ и при $a > 0$ у графиков одна общая точка. Если прямая касается окружности в точке E ($a = a_E$), у графиков две общие точки, а при $a < a_E$ у графиков одна общая точка.

При $a_E < a < -4$ у графиков три общие точки, значит, у системы три решения.

Найдем a_E из условия касания окружности $y^2+(x-2)^2 = 20$ и прямой $y = a - x$.

Уравнение $(a-x)^2 + (x-2)^2 = 20$, $2x^2 - 2x(a+2) + a^2 - 16 = 0$ имеет один корень, если выполняется условие $(a+2)^2 - 2(a^2 - 16) = 0$, $-a^2 + 4a + 36 = 0$. Получаем $a = 2 \pm 2\sqrt{10}$. Учитывая, что $a < 0$, $a_E = 2 - 2\sqrt{10}$.

Система имеет более двух решений при $2 - 2\sqrt{10} < a < -4$; $a = 0$.

Ответ: $(2 - 2\sqrt{10}; -4) \cup \{0\}$.

19. а) Можно. 25 человек получат каждый 4 монеты по 5 рублей и 5 человек — 20 монет по 1 рублю.

б) Не удастся. После того, как премию выдадут членам жюри, останется выдать 560 рублей 80 участникам. Каждому нужно выдать по 7 рублей. Выдать им можно не более 1 монеты по 5 рублей, потому что иначе получится приз не менее 10 рублей, что больше 7.

Значит, каждому из 80 игроков нужно выдать 2 монеты по 1 рублю, то есть их потребуется не менее $2 \cdot 80 = 160$, а у нас их всего 100.

в) Для 27 и более участников можно привести пример распределения денежных призов, при котором не удастся выдать теми монетами, которые имеются в наличии. Если у нас $n > 26$ игроков, то пусть нужно выдать 26 призов по 19 рублей, один приз 106 рублей и $n - 27$ призов по 0 рублей. Тогда приз в 19 рублей можно набрать как сумму 3 монет по 5 рублей и 4 монет по 1 рублю (все остальные наборы будут содержать ещё больше рублёвых монет). Тогда для 26 призов по 19 рублей потребуется не менее $26 \cdot 4 = 104$ монет по 1 рублю. По условию же монет 100, значит, 27 и более участникам не при любом распределении размера приза можно выдать призы теми монетами, которые имеются в наличии.

Докажем, что 26 игрокам удастся выдать призы при любом распределении их размера. Пусть набор призов таков: $x_1, x_2, ..., x_{26}$, при этом $x_1 + x_2 + ... + x_{26} = 600$. Каждый из призов x_i можно представить как несколько (k_i) монет по 5 рублей и остальную сумму дополнить r_i монетами по 1 рублю. $x_i = 5k_i + r_i$. Докажем, что если любое $0 \leqslant r_i \leqslant 4$, то сумма монет по 1 рублю $r_1 + r_2 + ... + r_{26} \leqslant 100$.

Так как $0 \leqslant r_i \leqslant 4$, то сумма 26 таких слагаемых не больше $26 \cdot 4 = 104$. При этом $x_1 + x_2 + ... + x_{26} = 5k_1 + r_1 + 5k_2 + r_2 + ... + 5k_{26} + r_{26} = 600$. Тогда $r_1 + r_2 + ... + r_{26} = 600 - 5(k_1 + k_2 + ... + k_{26})$, то есть сумма $r_1 + r_2 + ... + r_{26}$ делится на 5 и не превышает 104. Значит, эта сумма не превышает 100, а 100 монет по 1 рублю у нас есть.

Так как общая сумма рублей у нас равна 600, то сумму $r_1 + r_2 + ... + r_{26}$ можно выдать монетами по 1 рублю, а оставшуюся сумму монетами по 5 рублей и наборами по 5 однорублёвых монет.

Ответ: а) да, б) нет, в) 26.

Решение варианта № 4

1. Всего больному потребуется $0{,}4 \cdot 4 \cdot 28 = 44{,}8$ (г) лекарства. В одной упаковке $0{,}4 \cdot 12 = 4{,}8$ (г) лекарства. Тогда потребуется $44{,}8 : 4{,}8 = 9\frac{1}{3}$ упаковок, то есть 10 упаковок хватит на весь курс лечения.

Ответ: 10.

2. Для отыскания числа указанного периода, в которое выпало наибольшее количество осадков, ищем точку, ордината которой принимает наибольшее значение. Это точка с координатами $(22; 6)$. Значит, 22 марта выпало наибольшее количество осадков.

Ответ: 22.

3. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов, то есть $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 = 7{,}5$.

Ответ: 7,5.

4. Из 1000 сумок по условию задачи 981 качественная и 19 имеют скрытые дефекты. Тогда вероятность того, что выбранная в магазине сумка окажется с дефектами, равна $\frac{19}{1000} = 0{,}019$.

Ответ: 0,019.

5. $\frac{1}{8x-2} = 5$; $40x - 10 = 1$; $40x = 11$; $x = \frac{11}{40} = 0{,}275$.

Ответ: 0,275.

6. $\operatorname{tg} A = \frac{1}{7}$, значит, $\frac{BC}{AC} = \frac{1}{7}$; $AC = 7BC$ (см. рис. 16). Тогда $BC^2 + (7BC)^2 = AB^2$; $50BC^2 = 24^2$; $BC = \frac{24}{5\sqrt{2}}$; $AC = \frac{168}{5\sqrt{2}}$.

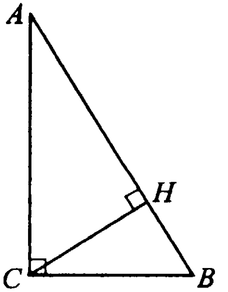


Рис. 16

$1+\operatorname{tg}^2 A=\dfrac{1}{\cos^2 A}$, откуда $\cos A=\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 A}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{49}}}=\dfrac{7}{5\sqrt{2}}=$

$=\sin B$, $\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\dfrac{1}{5\sqrt{2}}$.

Из прямоугольного треугольника BCH имеем $\dfrac{BH}{BC}=\cos B$;

$BH=BC\cos B$; $BH=\dfrac{24}{5\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{5\sqrt{2}}=\dfrac{24}{50}=0{,}48$.

Ответ: 0,48.

7. Согласно геометрическому смыслу производной $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$ (см. рис. 17).

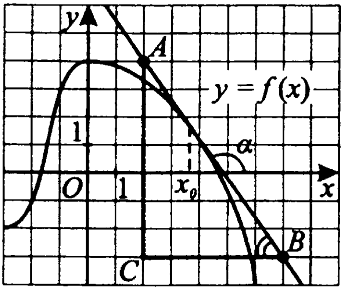


Рис. 17

Тогда $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha=-\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\angle ABC=-\dfrac{AC}{BC}=-\dfrac{7}{5}=-1{,}4$.

Ответ: $-1{,}4$.

8. Объём конуса равен $V=\dfrac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot H$. Так как объём конуса прямо пропорционален площади основания, а площадь основания прямо пропорциональна квадрату радиуса ($S=\pi R^2$), то объём конуса прямо пропорционален квадрату радиуса. Если радиус увеличится в 1,6 раз, то объём конуса увеличится в $1{,}6^2$ раз, то есть в 2,56 раз.

Ответ: 2,56.

9. $48^{-8{,}3}\cdot 6^{9{,}3}:8^{-7{,}3}=\dfrac{6^{9{,}3}\cdot 8^{7{,}3}}{48^{8{,}3}}=\dfrac{6^{9{,}3}\cdot 8^{7{,}3}}{6^{8{,}3}\cdot 8^{8{,}3}}=\dfrac{6}{8}=0{,}75$.

Ответ: 0,75.

10. По условию $k = 23$, $r_{\text{пок}} = 0{,}88$, $r_{\text{экс}} = 0{,}18$.

Тогда $m = \dfrac{0{,}03 \cdot 23}{0{,}88 + 0{,}5} = \dfrac{0{,}69}{1{,}38} = 0{,}5$,

$R = 0{,}88 - \dfrac{0{,}88 - 0{,}18}{(23+2)^{0{,}5}} = 0{,}88 - \dfrac{0{,}7}{5} = 0{,}88 - 0{,}14 = 0{,}74$.

Ответ: 0,74.

11. Пусть каждого раствора было по x л. Тогда объём вещества в первом растворе $0{,}31x$, во втором — $0{,}23x$. После смешивания объём раствора станет равным $2x$, а объём вещества $0{,}23x + 0{,}31x = 0{,}54x$.

Составим пропорцию:

$2x$ — 100%

$0{,}54x$ — z%

Отсюда $\dfrac{2x}{0{,}54x} = \dfrac{100}{z}$, $z = 27$ (%).

Ответ: 27.

12. Функции $y = 3^{-60-16x-x^2}$ и $y = -60 - 16x - x^2$ принимают наибольшее значение в одной точке. Функция $y = -60 - 16x - x^2$ принимает наибольшее значение в вершине соответствующей ей параболы: $x_0 = -\dfrac{-16}{2 \cdot (-1)} = -8$.

Тогда $y_{\text{наиб}} = 3^{-60-16\cdot(-8)-(-8)^2} = 3^4 = 81$.

Ответ: 81.

13. а) Преобразуем уравнение. $\left(7^{-2}\right)^{\cos 2x} = 7^{2-2\cos x}$,

$-2\cos 2x = 2 - 2\cos x$, $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$, $2\cos^2 x - \cos x = 0$, $\cos x(2\cos x - 1) = 0$.

Если $\cos x = 0$, то $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

Если $2\cos x - 1 = 0$, $\cos x = \dfrac{1}{2}$, то $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left(-\dfrac{5\pi}{2}; -\pi\right]$, найдём с помощью окружности (см. рис. 18).

$x = -\dfrac{\pi}{3} - 2\pi = -\dfrac{7\pi}{3}$, $x = \dfrac{\pi}{2} - 2\pi = -\dfrac{3\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{3} - 2\pi = -\dfrac{5\pi}{3}$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k, n \in Z$; б) $-\dfrac{7\pi}{3}$, $-\dfrac{5\pi}{3}$, $-\dfrac{3\pi}{2}$.

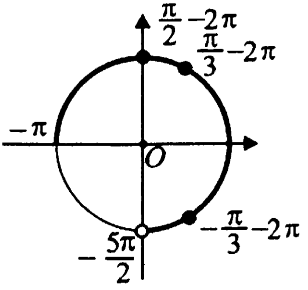


Рис. 18

14. Прямая PV параллельна BC из подобия треугольников DBC и DPV и, значит, PV параллельна плоскости основания ABC, поэтому сечение пересекает плоскость основания по некоторой прямой RQ, параллельной PV (см. рис. 19).

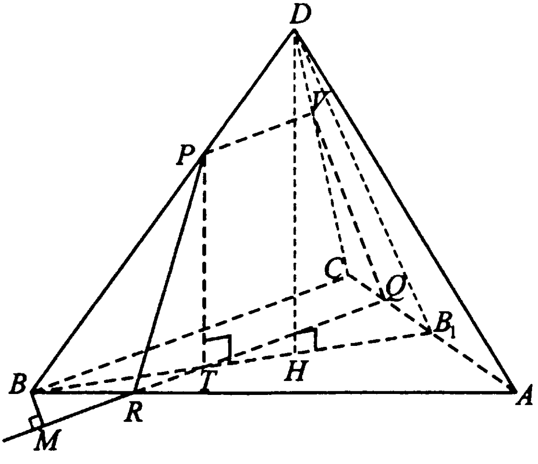


Рис. 19

Рассмотрим плоскость DBB_1.

$PT \parallel DH$, так как $DH \parallel \beta$. Значит, $\triangle PTB \sim \triangle DHB$ и $BT : TH = 2 : 1$.

Медиана BB_1 делится точкой H в отношении $B_1H : HB = 1 : 2$, значит, $B_1T : TB = 5 : 4$.

б) Найдём длину B_1H. По условию $DB_1 = 17$ и $DH = 15$. Из прямоугольного треугольника B_1DH получаем

$B_1H = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$, тогда $BH = 2B_1H = 16$ и $BT = \frac{2}{3}BH = \frac{32}{3}$.

Так как плоскости β и ABC перпендикулярны, расстояние от точки B до плоскости β лежит в плоскости основания (на рисунке это отрезок BM) и $BM = BT\sin\angle BTR = BT\sin 30^\circ = \frac{16}{3}$.

Ответ: $\frac{16}{3}$.

15. Преобразуем неравенство, сделав замену $3^x = t$.

$\frac{22t-6}{3(3t^2-28t+9)} + \frac{1}{3} \geqslant 0,\quad \frac{(t-1)^2}{3t^2-28t+9} \geqslant 0.$

Решим неравенство методом интервалов.

Найдём нули числителя и знаменателя $t-1=0,\ t=1$ (см. рис. 20).

$3t^2-28t+9=0,\ t=\frac{1}{3},\ t=9.$

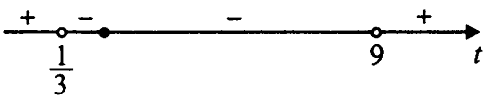


Рис. 20

$t < \frac{1}{3},\ t=1,\ t>9.$

При $t < \frac{1}{3}$ получим: $3^x < \frac{1}{3}$, $3^x < 3^{-1}$ откуда $x < -1$.

При $t = 1$ получим: $3^x = 1$, откуда $x = 0$.

При $t > 9$ получим: $3^x > 9$, откуда $x > 2$.

Решение исходного неравенства: $x \in (-\infty; -1) \cup \{0\} \cup (2; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -1) \cup \{0\} \cup (2; +\infty)$.

16. а) DK и AH — биссектрисы равнобедренных треугольников, проведённые к основаниям (см. рис. 21), они являются медианами и высотами. Пусть эти биссектрисы пересекаются в точке Q (пока мы полагаем, что Q не обязательно лежит на BC). Получаем $DK \perp RC$, $RK = KC$, значит, треугольник RQC равнобедренный и в нём $QR = QC$. Аналогично $BH \perp QA$, $BH = HR$, значит, $QR = QB$.

$QR = QC = QB$, поэтому Q — центр описанной около прямоугольного треугольника RCB окружности, который лежит на середине гипотенузы BC.

б) В четырёхугольнике $RKQH$ $\angle R = \angle K = \angle H = 90^\circ$, значит, $\angle HQK = 90^\circ$, $RKQH$ — прямоугольник.

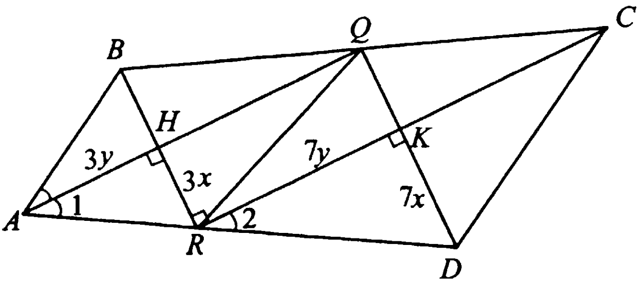


Рис. 21

$S_{RKQH} = RK \cdot RH = 63.$

$RC = 2RK, RB = 2RH.$

$S_{RCB} = \frac{1}{2}RC \cdot RB = \frac{2RK \cdot 2RH}{2} = 126.$

$\triangle ARH \sim \triangle RDK$ по двум углам, $\angle H = \angle K = 90°$, $\angle 1 = \angle 2$ как соответственные при $RK \parallel AQ$ и секущей AD.

$RD : AR = RK : AH = DK : RH = 7 : 3.$

Пусть $RK = KC = 7y, DK = 7x$, тогда $BH = RH = 3x$, $AH = 3y$ (см. рис. 21).

$S_{RKQH} = 7y \cdot 3x = 63,\ xy = 3.$

$S_{BHA} = S_{ARH} = \frac{1}{2}3x \cdot 3y = 4{,}5xy = 13{,}5.$

$S_{CDK} = S_{DRK} = \frac{1}{2}7x \cdot 7y = 73{,}5.$

$S_{ABCD} = S_{RCB} + 2S_{ARH} + 2S_{DRK} = 126 + 2 \cdot 13{,}5 + 2 \cdot 73{,}5 = 300.$

Ответ: 300.

17. Обозначим прибыль фирмы (в млн рублей) за один год $f(x) = ax - (0{,}5x^2 + 4x + 19)$.

Найдём, при каких условиях данная функция принимает наибольшее значение. Квадратичная функция
$f(x) = -0{,}5x^2 - (4 - a)x - 19$ принимает наибольшее значение при

$x = \frac{4 - a}{-1} = a - 4.$

Чтобы строительство нового цеха окупилось не более чем за три года, необходимо выполнение условия $3f(x) \geqslant 39$, то есть
$-0{,}5x^2 - (4 - a)x - 19 \geqslant 13$. Так как $x = a - 4$, получим

$-\dfrac{(a-4)^2}{2}-(4-a)(a-4)-19\geqslant 13$, то есть $\dfrac{(a-4)^2}{2}\geqslant 32$, $(a-4)^2\geqslant 64$, тогда получаем $a-4\leqslant -8$ или $a-4\geqslant 8$. Наименьшая положительная цена будет при $a-4=8$, то есть $a=12$.

Ответ: 12.

18. Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют второму уравнению системы.

Если $x^2-3x-4\geqslant 0$ (данному неравенству удовлетворяют все точки с абсциссами $x\leqslant -1$, $x\geqslant 4$), то получим уравнение $y^2-3x-4=x^2-3x-4$, $y^2=x^2$.

Полученное уравнение задаёт прямые $y=-x$ и $y=x$. Учитывая условие $x^2-3x-4\geqslant 0$, получаем 4 луча с началами в точках $A(-1;1)$, $B(4;4)$, $C(4;-4)$ и $D(-1;-1)$ (см. рис. 22).

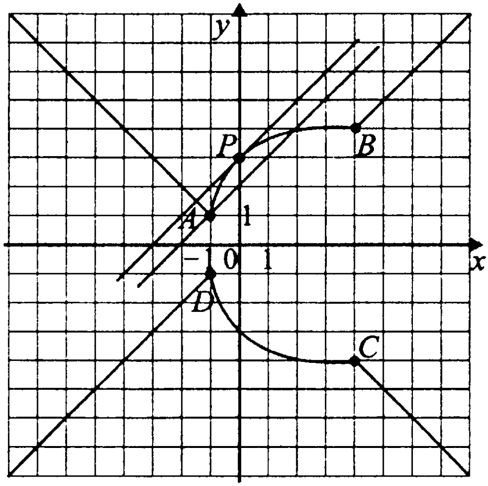


Рис. 22

Если $x^2-3x-4\leqslant 0$ (это точки с абсциссами $-1\leqslant x\leqslant 4$), то получаем уравнение $y^2-3x-4=-(x^2-3x-4)$, $y^2+x^2-6x-8=0$, $y^2+(x-3)^2=17$. Полученное уравнение задаёт окружность с центром $(3;0)$ и радиусом $\sqrt{17}$.

Учитывая условие $x^2-3x-4\leqslant 0$, получим две дуги с концами в точках A, B, C и D.

Рассмотрим второе уравнение системы $y-x=a$. Оно при каждом значении a задаёт прямую, проходящую через точку $(0,a)$, при этом все такие прямые параллельны между собой.

При $a = 0$ прямая проходит через точки B и D и исходная система имеет бесконечно много решений. При $-\infty < a < 0$ и при $0 < a < 2$ у графиков одна общая точка. Если прямая касается окружности в точке P $(a = a_P)$, у графиков две общие точки, а при $a > a_P$ у графиков одна общая точка.

При $2 < a < a_P$ у графиков три общие точки, значит, у системы три решения.

Найдём a_P из условия касания окружности $y^2+(x-3)^2 = 17$ и прямой $y = a + x$.

$(a + x)^2 + (x - 3)^2 = 17,\ a^2 + 2ax + x^2 + x^2 - 6x + 9 = 17.$

Уравнение $2x^2 + 2x(a - 3) + a^2 - 8 = 0$ имеет один корень, если выполняется условие $(a-3)^2 - 2(a^2-8) = 0,\ -a^2 - 6a + 25 = 0$. Получаем $a = -3 \pm \sqrt{34}$. Учитывая, что $a > 0$, $a_P = -3 + \sqrt{34}$.

Система имеет более двух решений при $2 < a < -3 + \sqrt{34}$ или при $a = 0$.

Ответ: $\{0\} \cup (2;-3+\sqrt{34})$.

19. а) Можно. 20 человек получат 3 купюры по 500 рублей и 20 человек 2 купюры по 500 рублей и 5 купюр по 100 рублей.

б) Не удастся. После того как премию выдадут ведущему специалисту, останется выдать 56 000 рублей 70 сотрудникам. Каждому нужно выдать по 800 рублей. Выдать им можно не более 1 купюры по 500 рублей, потому что иначе получится премия не менее 1 000 рублей, что больше 800.

Значит, каждому из 70 сотрудников нужно выдать 3 купюры по 100 рублей, то есть их потребуется не менее $3 \cdot 70 = 210$, а у нас их всего 100.

в) Для 27 и более сотрудников можно привести пример распределения премий, при котором не удастся выдать теми купюрами, которые имеются в наличии. Если у нас $n > 26$ сотрудников, то пусть нужно выдать 26 премий по 1900 рублей, одну премию 10 600 рублей и $n - 27$ премий по 0 рублей. Тогда премию в 1900 рублей можно набрать как сумму 3 купюр по 500 рублей и 4 купюры по 100 рублей (все остальные наборы будут содержать ещё больше сторублёвых купюр). Тогда для 26 премий по 1900 рублей потребуется не менее $26 \cdot 4 = 104$ купюр по 100 рублей. По условию же купюр 100, значит, 27 и более сотрудникам не при любом распределении размера премий можно выдать премии теми купюрами, которые имеются в наличии.

Докажем, что 26 сотрудникам удастся выдать премии при любом распределении их размера. Пусть набор премий таков: $x_1, x_2, \ldots, x_{26}$, при этом $x_1 + x_2 + \ldots + x_{26} = 60\,000$. Каждую из премий x_i можно представить как несколько (k_i) купюр по 500 рублей и остальную сумму дополнить r_i купюрами по 100 рублей. $x_i = 500k_i + 100r_i$. Докажем, что если любое $0 \leqslant r_i \leqslant 400$, то сумма купюр по 100 рублей $r_1 + r_2 + \ldots + r_{26} \leqslant 100$.

Так как $0 \leqslant r_i \leqslant 400$, то сумма 26 таких слагаемых не больше $26 \cdot 400 = 10400$. При этом $x_1 + x_2 + \ldots + x_{26} =$ $500k_1 + 100r_1 + 500k_2 + 100r_2 + \ldots + 500k_{26} + 100r_{26} = 60000$. Тогда $100(r_1 + r_2 + \ldots + r_{26}) = 60000 - 500(k_1 + k_2 + \ldots + k_{26})$, $r_1 + r_2 + \ldots + r_{26} = 600 - 5(k_1 + k_2 + \ldots + k_{26})$, то есть сумма $r_1 + r_2 + \ldots + r_{26}$ делится на 5 и не превышает 104. Значит, эта сумма не превышает 100, а 100 купюр по 100 рублей у нас есть.

Так как общая сумма премий у нас равна 60 000, то сумму $r_1 + r_2 + \ldots + r_{26}$ можно выдать купюрами по 100 рублей, а оставшуюся сумму купюрами по 500 рублей и наборами по 5 сторублёвых купюр.

Ответ: а) да, б) нет, в) 26.

Решение варианта № 6

1. Цена на мобильный телефон была снижена с 4600 до 3910 рублей, то есть на $(4600 - 3910) = 690$ рублей. Вычислим, какой процент от числа 4600 составляет число 690. Получим $\frac{690}{4600} \cdot 100\% = 15\%$.

Ответ: 15.

2. Высота столбика пропорциональна числу посетителей сайта. Месяцу, в котором число посетителей было наибольшим, соответствует самый высокий столбик. Самый высокий столбик — у месяца под номером 5.

Ответ: 5.

3. В треугольнике ABC (см. рис. 23) $\angle C = 90°$. Следовательно, $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC$. Заметим, что $AC = 10 - 2 = 8$, $BC = 6 - 2 = 4$.

Таким образом, $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 = 16$.

Ответ: 16.

4. Будем считать, что эксперимент заключается в вытягивании карточки капитаном команды России. Этот эксперимент имеет 20 равновозможных исходов (по числу карточек), из них 4 благоприятствуют событию «Команда России окажется во второй группе» (исходы, соответствующие

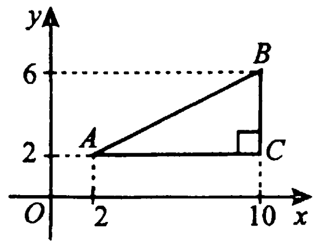


Рис. 23

карточкам с числом 2). По определению вероятности искомая вероятность равна $\frac{4}{20} = 0{,}2$.

Ответ: 0,2.

5. $-\frac{4}{7}x = 13\frac{5}{7}$; $-\frac{4}{7}x = \frac{96}{7}$; $-4x = 96$; $x = \frac{96}{-4} = -24$.

Ответ: -24.

6. $AB = \dfrac{BC}{\sin\angle A} = \dfrac{10}{\sqrt{1-\cos^2\angle A}} = \dfrac{10}{\frac{1}{5}} = 50$ (так как угол A — острый).

$AH = AC\cdot\cos\angle A = AB\cdot\cos\angle A\cdot\cos\angle A = 50\cdot\frac{24}{25} = 48$ (см. рис. 24).

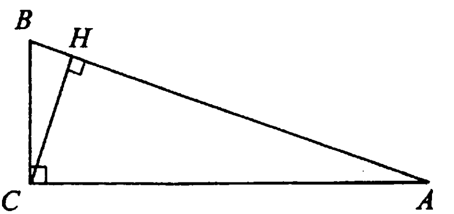


Рис. 24

Ответ: 48.

7. Из графика видно, что целые точки $x = -1;\ 0;\ 1\ \ 4;\ 5$ принадлежат промежуткам убывания и не совпадают с их границами, а остальные целые точки принадлежат промежуткам возрастания. В точках x, принадлежащих промежуткам возрастания, $f'(x) \geqslant 0$, а в перечисленных точках $f'(x) \leqslant 0$. Отберём те точки, в которых $f'(x) < 0$. Для этого в каждой из точек $x = -1;\ 0;\ 1\ \ 4;\ 5$ мысленно проведём касательную к графику $y = f(x)$ и исключим те точки, в которых касательная является горизонтальной прямой (если такие точки есть). Видно, что таких точек нет.

Значит, производная отрицательна в целых точках $x = -1;\ 0;\ 1\ 4;\ 5$ и ни в каких других. Искомых точек 5.

Ответ: 5.

8. Пусть KL — средняя линия основания исходной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (см. рис. 25).

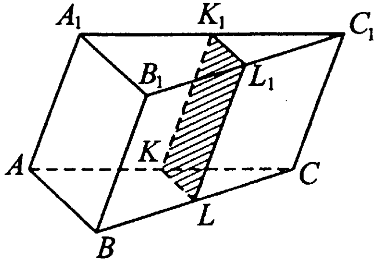


Рис. 25

Тогда $\triangle KLC \sim \triangle ABC$ по двум углам ($\angle C$ — общий, $\angle KLC = \angle ABC$ как соответственные углы при $KL \parallel AB$ и секущей BC). Коэффициент подобия $k = \dfrac{CL}{BC} = \dfrac{1}{2}$, так как KL — средняя линия. Тогда $\dfrac{S_{KLC}}{S_{ABC}} = k^2 = \dfrac{1}{4}$, $S_{ABC} = 4S_{KLC}$.

Призмы $ABCA_1B_1C_1$ и $KLCK_1L_1C_1$ имеют общую высоту h. Тогда $V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{ABC} \cdot h$, $V_{KLCK_1L_1C_1} = S_{KLC} \cdot h$. Значит, $V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{ABC} \cdot h = 4S_{KLC} \cdot h = 4V_{KLCK_1L_1C_1} = 4 \cdot 9{,}5 = 38$.

Ответ: 38.

9. $3{,}5^{\frac{7}{9}} \cdot 7^{\frac{4}{9}} \cdot 14^{\frac{7}{9}} = \left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{7}{9}} \cdot 7^{\frac{4}{9}} \cdot (2 \cdot 7)^{\frac{7}{9}} = 7^{\frac{7}{9}} \cdot 2^{-\frac{7}{9}} \cdot 7^{\frac{4}{9}} \cdot 7^{\frac{7}{9}} \cdot 2^{\frac{7}{9}} =$

$= 7^{\frac{7}{9}+\frac{4}{9}+\frac{7}{9}} \cdot 2^{-\frac{7}{9}+\frac{7}{9}} = 7^2 \cdot 2^0 = 49 \cdot 1 = 49.$

Ответ: 49.

10. Подставив значения p, v и f в формулу $\pi(q)$, получим $\pi(q) = q(750 - 250) - 800\,000$; $\pi(q) = 500q - 800\,000$. Согласно условию, нужно найти наименьшее значение q, при котором будет выполняться неравенство $500q - 800\,000 \geqslant 400\,000$, то есть $500q \geqslant 1\,200\,000$; $q \geqslant 2400$. Наименьшее значение q равно 2400 (единиц продукции).

Ответ: 2400.

11. В исходном сплаве массой 24 кг содержится $24 \cdot 0{,}45 = 10{,}8$ кг меди. Если добавить в этот сплав x кг олова, то суммарная масса сплава станет равна $(24+x)$ кг, а масса меди не изменится. Тогда процентное содержание меди окажется равным $\frac{10{,}8}{24+x}\cdot 100\%$. По условию должно выполняться $\frac{10{,}8}{24+x}\cdot 100\% = 40\%$. Отсюда $\frac{10{,}8}{24+x} = 0{,}4$; $10{,}8 = 0{,}4\cdot(24+x)$; $10{,}8 = 9{,}6 + 0{,}4x$; $0{,}4x = 1{,}2$, $x = 3$.

Ответ: 3.

12. Найдём производную исходной функции:
$y'(x) = (20-x)'e^{x+10} + (20-x)\cdot\left(e^{x+10}\right)' = -1\cdot e^{x+10} + (20-x)e^{x+10} =$
$= (19-x)e^{x+10}$.

Ясно, что $y'(x) = 0$ при $x = 19$, $y'(x) > 0$ при $x < 19$ и $y'(x) < 0$ при $x > 19$.

Следовательно, $y(x)$ возрастает при $x < 19$ и убывает при $x > 19$ (см. рис. 26). Значит, $x = 19$ — точка максимума.

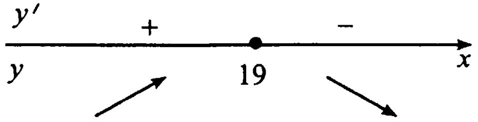


Рис. 26

Ответ: 19.

13. а) Используя формулу косинуса двойного угла $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ и формулу приведения $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x$, преобразуем исходное уравнение к виду:

$$4\sin^2 x - 8\sin x - 5 = 0;\ (2\sin x + 1)(2\sin x - 5) = 0.$$

Отсюда $\sin x = -\frac{1}{2}$ или $\sin x = \frac{5}{2}$.

Если $\sin x = -\frac{1}{2}$, то $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$,

или $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Уравнение $\sin x = \frac{5}{2}$ корней не имеет, так как $\frac{5}{2} > 1$.

б) С помощью числовой окружности (см. рис. 27) отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

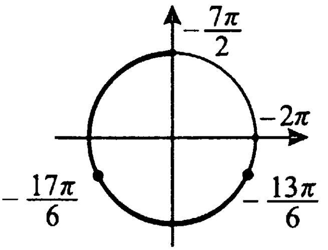


Рис. 27

Получим числа $-\frac{17\pi}{6}$ и $-\frac{13\pi}{6}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$; б) $-\frac{17\pi}{6}; -\frac{13\pi}{6}$.

14. а) Заметим, что треугольник SAB является прямоугольным, так как в нём $SB^2 = 175 = 31 + 144 = SA^2 + AB^2$. Аналогично треугольник SAD тоже является прямоугольным, поскольку $SD^2 = 112 = 31 + 81 = SA^2 + AD^2$. Получаем, что прямая SA перпендикулярна прямым AB и AD, а значит, перпендикулярна плоскости основания $ABCD$.

б) Отложим на прямой AD за точку D отрезок DE, равный отрезку AD (см. рис. 28). Тогда в четырёхугольнике $BCED$ стороны BC и DE равны и параллельны. Следовательно, $BCED$ является параллелограммом, поэтому $BD||CE$, и угол между SC и BD будет равен углу между SC и CE.

По теореме Пифагора $BD^2 = AB^2 + AD^2 = 144 + 81 = 225$,
$SC^2 = SA^2 + AC^2 = SA^2 + BD^2 = 31 + 225 = 256$,
$SE^2 = SA^2 + AE^2 = 31 + 324 = 355$.

Значит, $BD = CE = 15,\ SC = 16,\ SE = \sqrt{355}$.

Пусть $\angle SCE = \alpha$. По теореме косинусов для треугольника SCE имеем: $SE^2 = SC^2 + CE^2 - 2SC \cdot CE \cdot \cos\alpha$,
$$\cos\alpha = \frac{SC^2 + CE^2 - SE^2}{2SC \cdot CE} = \frac{256 + 225 - 355}{2 \cdot 16 \cdot 15} = \frac{21}{80}.$$

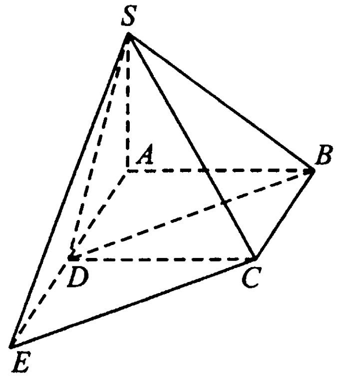


Рис. 28

Откуда $\alpha = \arccos\frac{21}{80}$.

Ответ: б) $\arccos\frac{21}{80}$.

15. Пусть $t = 4^{2-x^2} - 1$, тогда неравенство примет вид:
$\frac{t^2 - 18t + 45}{t^2} \geqslant 0$, $\frac{(t-3)(t-15)}{t^2} \geqslant 0$, откуда $t < 0$; $0 < t \leqslant 3$; $t \geqslant 15$.

При $t < 0$ получим: $4^{2-x^2} - 1 < 0$; $2 - x^2 < 0$, откуда $x < -\sqrt{2}$; $x > \sqrt{2}$.

При $0 < t \leqslant 3$ получим: $0 < 4^{2-x^2} - 1 \leqslant 3$; $0 < 2 - x^2 \leqslant 1$, откуда $-\sqrt{2} < x \leqslant -1$; $1 \leqslant x < \sqrt{2}$.

При $t \geqslant 15$ получим: $4^{2-x^2} - 1 \geqslant 15$; $2 - x^2 \geqslant 2$, откуда $x = 0$.

Решением исходного неравенства будет
$x < -\sqrt{2}$; $-\sqrt{2} < x \leqslant -1$; $x = 0$; $1 \leqslant x < \sqrt{2}$; $x > \sqrt{2}$.

Ответ: $(-\infty; -\sqrt{2})$; $(-\sqrt{2}; -1]$; 0; $[1; \sqrt{2})$; $(\sqrt{2}; +\infty)$.

16. а) Пусть Q — точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции (см. рис. 29). Точка Q, центры окружностей и точка P лежат на одной прямой, причём QP — биссектриса прямоугольного треугольника BQC. По свойству биссектрисы треугольника имеем: $\frac{BP}{PC} = \frac{QB}{QC} = \sin QCB$.

Так как $\angle C = 180° - \angle QCB$, получаем $\frac{BP}{PC} = \sin C$.

б) Пусть окружность с центром в точке O_1 и радиусом $R = \frac{8}{3}$ касается боковой стороны AB в точке E, а основания AD — в точке M;

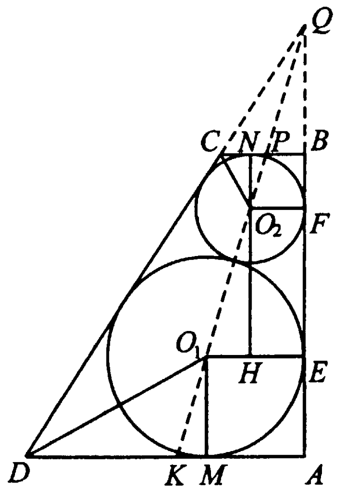


Рис. 29

окружность с центром в точке O_2 и радиусом $r = \frac{2}{3}$ касается боковой стороны AB в точке F, а основания BC — в точке N. Опустим перпендикуляр O_2H из центра меньшей окружности на отрезок O_1E. Тогда $O_1H = O_1E - HE = O_1E - O_2F = R - r = \frac{8}{3} - \frac{2}{3} = 2$. Так как прямая, соединяющая центры двух окружностей, проходит через точку касания этих окружностей, то $O_1O_2 = R + r = \frac{8}{3} + \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$. Значит, по теореме Пифагора, $EF = O_2H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1H^2} = \frac{8}{3}$.

Пусть $\angle AQP = \angle HO_2O_1 = \alpha$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{O_1H}{O_2H} = \frac{3}{4}$ и $\angle BQC = 2\alpha$, $\angle BCD = 90° + 2\alpha$, $\angle O_2CN = \frac{1}{2}\angle BCD = 45° + \alpha$. Из треугольника O_2CN находим:

$NC = O_2N \operatorname{ctg}(45° + \alpha) = O_2N \operatorname{tg}(45° - \alpha) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha} = \frac{2}{21}$.

Следовательно, $BC = BN + NC = \frac{2}{3} + \frac{2}{21} = \frac{16}{21}$.

Аналогично $\angle O_1DM = 45^\circ - \alpha$. Тогда

$$MD = O_1M \operatorname{ctg}(45^\circ - \alpha) = O_1M \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) = \frac{8}{3} \cdot \frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha} = \frac{56}{3}.$$

Следовательно, $AD = AM + MD = \frac{8}{3} + \frac{56}{3} = \frac{64}{3}$.

Поскольку $AB = AE + EF + FB = R + O_2H + r = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} + \frac{2}{3} = 6$, получаем:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot AB = \frac{1}{2}\left(\frac{64}{3} + \frac{16}{21}\right) \cdot 6 = \frac{464}{7}.$$

Ответ: $\frac{464}{7}$.

17. Пусть кредит планируется взять на n лет. Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$8,\ \frac{8(n-1)}{n}, \ldots, \frac{8 \cdot 2}{n},\ \frac{8}{n},\ 0.$$

По условию, каждый январь долг возрастает на 25%, значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

$$10,\ \frac{10(n-1)}{n}, \ldots, \frac{10 \cdot 2}{n},\ \frac{10}{n},\ 0.$$

Следовательно, выплаты (в млн рублей) должны быть следующими:

$$2 + \frac{8}{n},\ \frac{2(n-1)+8}{n}, \ldots, \frac{4+8}{n},\ \frac{2+8}{n}.$$

Всего следует выплатить

$$8 + 2 \cdot \left(\frac{n + (n-1) + \ldots + 2 + 1}{n}\right) = 8 + 2 \cdot \frac{n+1}{2} = n + 9 (\text{млн рублей}).$$

Общая сумма выплат равна 21 млн рублей, поэтому $n = 12$.

Ответ: 12.

18. Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы.

Рассмотрим два случая:

1) Если $x^2 + y^2 \geqslant 2$, получаем уравнение
$x^2-4\sqrt{2}x+y^2+4\sqrt{2}y+6 = x^2+y^2-2$, $-4\sqrt{2}x+4\sqrt{2}y = -8$, $y = x-\sqrt{2}$.

Это уравнение при соответствующих значениях x и y, удовлетворяющих неравенству $x^2 + y^2 \geqslant 2$, задаёт два луча, выходящих из точек $A(\sqrt{2};0)$ и $B(0;-\sqrt{2})$ и расположенных на прямой $y = x - \sqrt{2}$ (см. рис. 30).

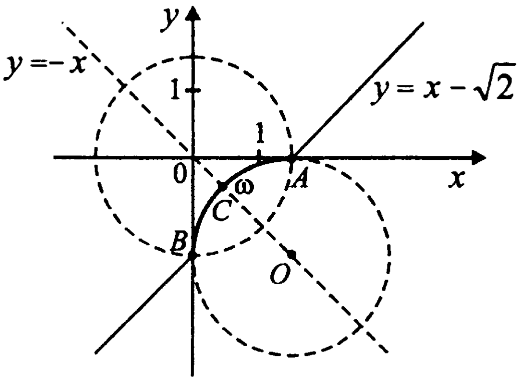


Рис. 30

2) Если $x^2 + y^2 \not\geqslant 2$, то получаем уравнение
$x^2-4\sqrt{2}x+y^2+4\sqrt{2}y+6 = 2-x^2-y^2$, $2x^2-4\sqrt{2}x+2y^2+4\sqrt{2}y+4 = 0$, $(x-\sqrt{2})^2 + (y+\sqrt{2})^2 = (\sqrt{2})^2$.

Это уравнение при соответствующих значениях x и y, удовлетворяющих неравенству $x^2 + y^2 < 2$, задаёт дугу ω окружности с центром в точке $O(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ и радиусом $\sqrt{2}$ с концами в точках A и B (см. рис. 30).

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно задаёт прямую $y = x - a$, параллельную прямой AB или совпадающую с ней при $a = \sqrt{2}$ (в этом случае система уравнений имеет бесконечное множество решений).

Очевидно, что при $a > \sqrt{2}$ система уравнений решений иметь не будет.

При $a < \sqrt{2}$ система уравнений будет иметь больше одного решения тогда и только тогда, когда прямая $y = x - a$ будет пересекать дугу ω в двух различных точках.

Найдём, при каком значении a прямая $y = x - a$ касается дуги ω. Из соображений симметрии заметим, что касание будет происходить в точке C с координатами $(x_0; y_0)$, которая находится на прямой $y = -x$ (см. рис. 30), откуда $y_0 = -x_0$. Подставляя координаты точки $C(x_0; -x_0)$ в уравнение, которое задаёт дугу ω, имеем:

$(x_0-\sqrt{2})^2+(-x_0+\sqrt{2})^2=(\sqrt{2})^2$, $|x_0-\sqrt{2}|=1$, $x_0=\sqrt{2}-1$.
$x_0=1-\sqrt{2}$ не принадлежит дуге ω.

Тогда $a=x_0-y_0=2x_0=2\sqrt{2}-2$.

Значит, при $2\sqrt{2}-2<a<\sqrt{2}$ система имеет два решения, при $a=2\sqrt{2}-2$ система имеет одно решение, при $a<2\sqrt{2}-2$ система решений не имеет.

Ответ: $(2\sqrt{2}-2;\sqrt{2}]$.

19. а) Пусть первоначально на доске было 25 чисел, равных 3, и 5 чисел, равных 21. Их среднее арифметическое равно

$$\frac{25\cdot 3+5\cdot 21}{30}=\frac{75+105}{30}=\frac{180}{30}=6.$$

Среднее арифметическое получившихся чисел равно $\frac{5\cdot 10{,}5}{5}=10{,}5>10$.

б) Пусть с доски было стёрто k чисел, сумма оставшихся была равна S, а стала равна $\frac{S}{2}$. По условию оказались стёрты только числа, получившиеся из 3, поэтому $\frac{S+3k}{30}=6$. Отсюда $S=180-3k$. Среднее арифметическое оставшихся чисел равно $\frac{S}{2(30-k)}$. Тогда

$$8<\frac{180-3k}{2(30-k)}<9;\quad 480-16k<180-3k<540-18k.$$

Последнее двойное неравенство запишем в виде системы неравенств

$$\begin{cases}480-16k<180-3k,\\ 180-3k<540-18k,\end{cases}\quad \begin{cases}13k>300,\\ 15k<360,\end{cases}\quad \begin{cases}k>23\frac{1}{13},\\ k<24.\end{cases}$$

Таких целых чисел k нет.

в) Найдём наибольшее возможное значение среднего арифметического $A=\frac{180-3k}{2(30-k)}$ оставшихся чисел в зависимости от целочисленного аргумента k — первоначального количества чисел 3 на доске. Имеем:

$$A=\frac{180-3k}{2(30-k)}=\frac{3k-180}{2k-60}=\frac{\frac{3}{2}\cdot(2k-60)-90}{2k-60}=$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{90}{2k-60} = \frac{3}{2} + \frac{45}{30-k}.$$

Число A будет наибольшим, если наибольшим будет значение аргумента k. Оценим это значение. Каждое из первоначально написанных на доске чисел было не более 42, в конце на доске осталось $30-k$ чисел, поэтому для суммы оставшихся чисел $S = 180 - 3k$ должно выполняться неравенство

$$180 - 3k \leqslant 42(30-k),\ \ 39k \leqslant 1080,\ \ k \leqslant \frac{360}{13} < 28,\ \ k \leqslant 27.$$

Тогда

$$A \leqslant \frac{3}{2} + \frac{45}{30-27} = 16{,}5.$$

Приведём пример, показывающий, что среднее арифметическое оставшихся на доске чисел действительно могло стать равным 16,5. Пусть первоначально на доске было написано 27 чисел, равных 3, и 3 числа, равных 33. Их среднее арифметическое было равно $\frac{27\cdot 3 + 3\cdot 33}{30} = 6$. Среднее арифметическое оставшихся чисел стало равно $\frac{3\cdot 16{,}5}{3} = 16{,}5$.

Ответ: а) да; б) нет; в) 16,5.

Решение варианта № 7

1. За год клиент должен выплатить 18 000 рублей с процентами, то есть $18\,000 \cdot \left(1 + \frac{14}{100}\right) = 18\,000 \cdot 1{,}14 = 20\,520$ рублей. Клиент должен ежемесячно вносить в банк одну и ту же сумму, чтобы за 12 месяцев рассчитаться по кредиту.

Значит, величина его ежемесячной выплаты равна $\frac{20\,520}{12} = 1710$ рублей.

Ответ: 1710.

2. По графику определим, что наибольшая температура 8 августа равна 30 °С.

Ответ: 30.

3. Ясно, что $ABCD$ — трапеция (см. рис. 31).
Её основания $AB = 4 - 1 = 3$, $CD = 7 - 0 = 7$, высота $AH = 10 - 1 = 9$.
Тогда $S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot AH = \frac{3+7}{2} \cdot 9 = 45$.

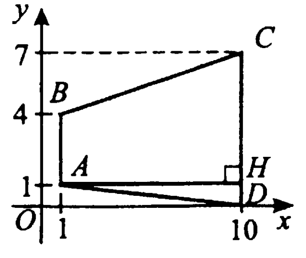


Рис. 31

Ответ: 45.

4. Гарантированно состоится ровно одно из следующих попарно не совместных событий.

1. С. решит не больше 11 задач.
2. С. решит ровно 12 задач.
3. С. решит более 12 задач.

Сумма вероятностей этих событий равна 1.

События «С. решит не больше 11 задач» и «С. решит больше 11 задач» противоположны, вероятность второго из них по условию равна 0,72. Значит, вероятность первого по свойству противоположных событий равна $1 - 0{,}72 = 0{,}28$. Заполним таблицу.

Событие	Решит не больше 11 задач	Решит ровно 12 задач	Решит больше 12 задач
Вероятность	$1 - 0{,}72 = 0{,}28$	?	0,68

Сумма вероятностей в этой таблице равна 1, поэтому искомая вероятность равна $1 - 0{,}28 - 0{,}68 = 0{,}04$.

Ответ: 0,04.

5. $\frac{5x}{4x^2 - 6} = 1$. ОДЗ $4x^2 - 6 \neq 0$.

Преобразуем уравнение на ОДЗ $5x = 4x^2 - 6$; $4x^2 - 5x - 6 = 0$; $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-6)}}{8} = \frac{5 \pm 11}{8}$; $x_1 = -\frac{3}{4}$, $x_2 = 2$. Очевидно, что оба этих значения принадлежат ОДЗ. Меньший из корней равен $-\frac{3}{4} = -0{,}75$.

Ответ: $-0{,}75$.

6. Опустим высоту AH (см. рис. 32). Треугольник ABC равнобедренный, поэтому $\angle BAC = \angle ABC$, $\sin\angle HBA = \sin\angle BAC = 0{,}8$. Из $\triangle ABH$ по определению синуса $\frac{AH}{AB} = \sin\angle ABC$, $\frac{AH}{12} = 0{,}8$, $AH = 9{,}6$.

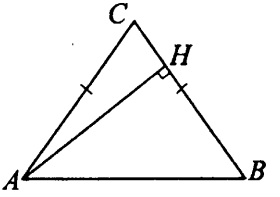


Рис. 32

Ответ: 9,6.

7. На интервале $(-2;\ 3)$ производная отрицательна, значит, на отрезке $[-2;\ 3]$ функция $f(x)$ строго убывает и, следовательно, наибольшее значение $f(x)$ принимает при наименьшем x, то есть при $x = -2$.

Ответ: -2.

8. Опустим высоту SO пирамиды $SABCD$ (см. рис. 33).

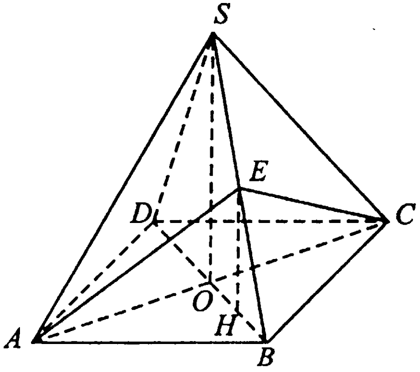


Рис. 33

Эта пирамида является правильной, поэтому O — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$. Тогда плоскость SBD перпендикулярна плоскости основания, так как проходит через прямую SO, перпендикулярную плоскости (ABC). В плоскости SBD проведём EH параллельно SO. $EH \perp (ABC)$ и потому EH — высота пирамиды $EABC$. С другой стороны, EH — средняя линия $\triangle SOB$, поэтому $EH = \frac{1}{2}SO$.

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO, V_{EABC} = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot EH =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}S_{ABSD}\right) \cdot EH = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}S_{ABSD}\right) \cdot \frac{1}{2}SO =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO\right) = \frac{1}{4}V_{SABCD} = \frac{1}{4} \cdot 18 = 4{,}5.$$

Ответ: 4,5.

9. Воспользуемся формулой синуса двойного аргумента.

$$\frac{48 \sin 29° \cos 29°}{\sin 58°} = \frac{24 \cdot (2 \sin 29° \cos 29°)}{\sin 58°} = \frac{24 \cdot \sin 58°}{\sin 58°} = 24.$$

Ответ: 24.

10. Если все рейтинги издания наибольшие, то $In = Op = Tr = 3$. Тогда рейтинг $R = \frac{4 \cdot 3 + 3 + 2 \cdot 3}{A} = \frac{21}{A}$. По условию должно выполняться $\frac{21}{A} = 105$. Следовательно, $A = \frac{21}{105} = 0{,}2$.

Ответ: 0,2.

11. Пусть цена холодильника ежегодно снижалась на $p\%$ от своего предыдущего значения. Тогда через год после выставления на продажу он стал стоить $\left(1 - \frac{p}{100}\right) \cdot 25\,000$ рублей, а через 2 года $\left(1 - \frac{p}{100}\right) \cdot \left(\left(1 - \frac{p}{100}\right) \cdot 25\,000\right) = \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 \cdot 25\,000$ рублей.

Согласно условию, получаем уравнение $\left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 \cdot 25\,000 = 21\,622{,}5$. Отсюда $\left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 = \frac{21\,622{,}5}{25\,000} = \frac{8649}{10\,000}$. Заметим, что $\frac{8649}{10\,000} = \frac{9 \cdot 961}{100^2} = \frac{3^2 \cdot 31^2}{100^2}$. Тогда $\left(1 - \frac{p}{100}\right) = \frac{3 \cdot 31}{100}$; $\frac{p}{100} = \frac{7}{100}$; $p = 7$.

Ответ: 7.

12. Найдём производную исходной функции
$y'(x) = \left((x-9)^2\right)' e^{2x-1} + (x-9)^2\left(e^{2x-1}\right)' = 2(x-9)e^{2x-1} + (x-9)^2 \cdot 2 \cdot e^{2x-1} =$
$= 2e^{2x-1}(x-9)(1+x-9) = 2e^{2x-1}(x-9)(x-8).$

Ясно, что $y'(x) = 0$ при $x = 8$ и $x = 9$. Тогда $y'(x) > 0$ при $x < 8$ и $x > 9$; $y'(x) < 0$ при $8 < x < 9$. Укажем промежутки монотонности исходной функции $y(x)$ (см. рис. 34).

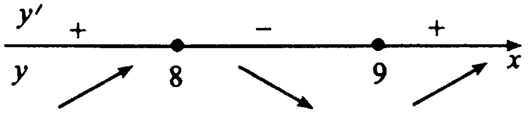


Рис. 34

Точкой минимума является $x = 9$.

Ответ: 9.

13. а) Используя формулу косинуса двойного угла $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, преобразуем исходное уравнение к виду:

$$3(2\cos^2 x - 1) + 0{,}5 = \cos^2 x,\ 5\cos^2 x - 2{,}5 = 0;\ \cos^2 x = \frac{1}{2}.$$

$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$, или $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$.

$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$, или $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Эти семейства решений можно объединить в одно: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$.

б) С помощью числовой окружности (см. рис. 35) отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

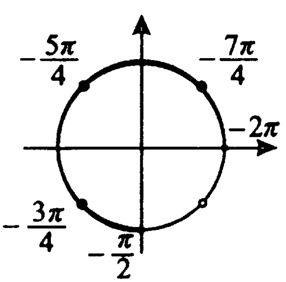


Рис. 35

Получим числа $-\frac{7\pi}{4}$, $-\frac{5\pi}{4}$, $-\frac{3\pi}{4}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; б) $-\frac{7\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}$.

14. а) Заметим, что треугольник SBC является прямоугольным, так как в нём $SC^2 = 297 = 72 + 225 = SB^2 + BC^2$. Аналогично треугольник SBA тоже является прямоугольным, поскольку $SA^2 = 136 = 72 + 64 = SB^2 + AB^2$. Получаем, что прямая SB перпендикулярна прямым BC и AB, а значит, перпендикулярна плоскости основания $ABCD$.

б) Отложим на прямой BA за точку A отрезок AE, равный отрезку AB (см. рис. 36). Тогда в четырёхугольнике $CDEA$ стороны CD и AE равны и параллельны. Следовательно, $CDEA$ является параллелограммом, поэтому $AC||DE$, и угол между SD и AC будет равен углу между SD и DE.

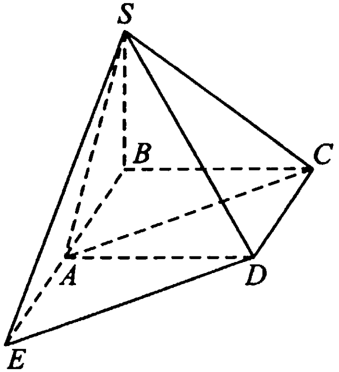


Рис. 36

По теореме Пифагора $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 64 + 225 = 289$,
$SD^2 = SB^2 + BD^2 = SB^2 + AC^2 = 72 + 289 = 361$,
$SE^2 = SB^2 + BE^2 = 72 + 256 = 328$.

Значит, $AC = DE = 17$, $SD = 19$.

Пусть $\angle SDE = \alpha$. По теореме косинусов для треугольника SDE имеем: $SE^2 = SD^2 + DE^2 - 2SD \cdot DE \cdot \cos\alpha$,

$$\cos\alpha = \frac{SD^2 + DE^2 - SE^2}{2SD \cdot DE} = \frac{361 + 289 - 328}{2 \cdot 19 \cdot 17} = \frac{161}{323}.$$

Таким образом, получили, что угол α — острый. Значит, углом между прямыми SD и AC будет $\alpha = \arccos\frac{161}{323}$.

Ответ: б) $\arccos\frac{161}{323}$.

15. Пусть $t = 3^{1-x^2} + 1 > 1$, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{3t^2 - 16t + 16}{t^2} \geqslant 0, \quad \frac{3\left(t - \frac{4}{3}\right)(t-4)}{t^2} \geqslant 0,$$

откуда $t \leqslant \frac{4}{3}$; $t \geqslant 4$.

При $t \leqslant \frac{4}{3}$ получим: $3^{1-x^2} + 1 \leqslant \frac{4}{3}$; $3^{1-x^2} \leqslant 3^{-1}$; $1 - x^2 \leqslant -1$; $x^2 \geqslant 2$, откуда $x \leqslant -\sqrt{2}$; $x \geqslant \sqrt{2}$.

При $t \geqslant 4$ получим: $3^{1-x^2} + 1 \geqslant 4$; $3^{1-x^2} \geqslant 3^1$; $1 - x^2 \geqslant 1$, откуда $x = 0$.

Решением исходного неравенства будет

$$x \leqslant -\sqrt{2};\ x = 0;\ x \geqslant \sqrt{2}.$$

Ответ: $(-\infty; -\sqrt{2}]; 0; [\sqrt{2}; +\infty)$.

16. а) Пусть Q — точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции (см. рис. 37). Точка Q, центры окружностей и точка P лежат на одной прямой, причём QP — биссектриса прямоугольного треугольника AQD. По свойству биссектрисы треугольника имеем: $\frac{AP}{PD} = \frac{QA}{QD} = \sin D$.

б) Пусть окружность с центром в точке O_1 и радиусом $R = 4$ касается боковой стороны AB в точке E, а основания AD — в точке M; окружность с центром в точке O_2 и радиусом $r = 1$ касается боковой стороны AB в точке F, а основания BC — в точке N. Опустим перпендикуляр O_2H из центра меньшей окружности на отрезок O_1E. Тогда $O_1H = O_1E - HE = O_1E - O_2F = R - r = 4 - 1 = 3$. Так как прямая, соединяющая центры двух окружностей, проходит через точку касания этих окружностей, то $O_1O_2 = R + r = 4 + 1 = 5$. Значит, по теореме Пифагора, $EF = O_2H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1H^2} = 4$.

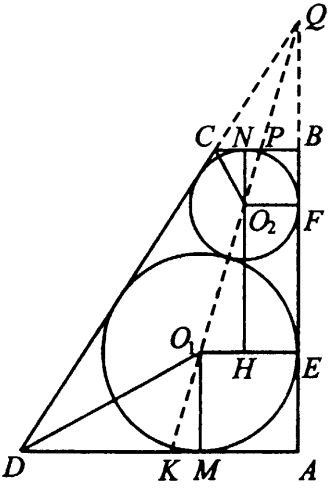


Рис. 37

Пусть $\angle AQP = \angle HO_2O_1 = \alpha$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{O_1H}{O_2H} = \dfrac{3}{4}$ и $\angle BQC = 2\alpha$, $\angle BCD = 90° + 2\alpha$, $\angle O_2CN = \dfrac{1}{2}\angle BCD = 45° + \alpha$.

Из треугольника O_2CN находим:

$$NC = O_2N\operatorname{ctg}(45° + \alpha) = O_2N\operatorname{tg}(45° - \alpha) = 1 \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{7}.$$

Следовательно, $BC = BN + NC = 1 + \frac{1}{7} = \frac{8}{7}$.

Аналогично $\angle O_1DM = 45° - \alpha$. Тогда

$$MD = O_1M\operatorname{ctg}(45° - \alpha) = O_1M\operatorname{tg}(45° + \alpha) = 4 \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha} = 28.$$

Следовательно, $AD = AM + MD = 4 + 28 = 32$, $AB = AE + EF + FB = R + O_2H + r = 4 + 4 + 1 = 9$.

Найдём CD по теореме Пифагора:

$$CD = \sqrt{AB^2 + (AD - BC)^2} = \sqrt{9^2 + \left(32 - \frac{8}{7}\right)^2} = \frac{225}{7}.$$

$$P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD = 9 + \frac{8}{7} + \frac{225}{7} + 32 = \frac{520}{7}.$$

Ответ: $\dfrac{520}{7}$.

17. Пусть кредит планируется взять на n лет. Остаток долга перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно, т.е. образует убывающую арифметическую прогрессию:

$$8,\ \frac{8(n-1)}{n}, \ldots, \frac{8\cdot 2}{n},\ \frac{8}{n},\ 0.$$

Пусть x_1, x_2, ..., x_n — выплаты (в млн рублей), который производит заёмщик с февраля по июнь каждого года. Каждая выплата состоит из постоянной части, равной $\frac{8}{n}$, и процентных денег, начисленных на остаток долга:

$$x_1 = \frac{8}{n} + \frac{20}{100}\cdot 8,$$

$$x_2 = \frac{8}{n} + \frac{20}{100}\cdot\frac{8(n-1)}{n},$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{8}{n} + \frac{20}{100}\cdot\frac{8}{n}.$$

Таким образом, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ тоже образует убывающую арифметическую прогрессию. Следовательно, наибольшим годовым платежом будет x_1. Составим и решим неравенство:

$$\frac{8}{n} + \frac{20}{100}\cdot 8 \leqslant 2{,}4,\quad \frac{8}{n} \leqslant 0{,}8,\quad n \geqslant 10.$$

Поскольку в условии задачи требуется найти минимальное значение n, то $n = 10$.

Ответ: 10.

18. Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы.

Рассмотрим два случая:

1) Если $x^2 + y^2 \geqslant 9$, получаем уравнение
$x^2 + 12x + 36 = x^2 + y^2 - 9 - y^2 + 12y + 9,\ 12x + 36 = 12y,\ y = x + 3.$

Это уравнение при соответствующих значениях x и y, удовлетворяющих неравенству $x^2 + y^2 \geqslant 9$, задаёт два луча, выходящих из точек $A(-3;0)$ и $B(0;3)$ и расположенных на прямой $y = x + 3$ (см. рис. 38).

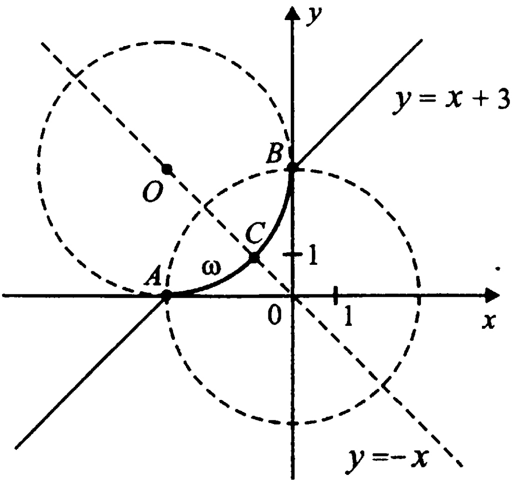


Рис. 38

2) Если $x^2 + y^2 < 9$, то получаем уравнение
$x^2+12x+36 = 9-x^2-y^2-y^2+12y+9$, $2x^2+12x+2y^2-12y+18 = 0$, $x^2+6x+y^2-6y+9=0$, $(x+3)^2+(y-3)^2=3^2$.

Это уравнение при соответствующих значениях x и y, удовлетворяющих неравенству $x^2+y^2<9$, задаёт дугу ω окружности с центром в точке $O(-3;3)$ и радиусом 3 с концами в точках A и B (см. рис. 38).

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно задаёт прямую $y = x - a$, параллельную прямой AB или совпадающую с ней при $a = -3$ (в этом случае система уравнений имеет бесконечное множество решений).

Очевидно, что при $a < -3$ система уравнений решений иметь не будет.

При $a > -3$ система уравнений будет иметь больше одного решения тогда и только тогда, когда прямая $y = x - a$ будет пересекать дугу ω в двух различных точках.

Найдём, при каком значении a прямая $y = x - a$ касается дуги ω. Из соображений симметрии заметим, что касание будет происходить в точке C с координатами $(x_0; y_0)$, которая находится на прямой $y = -x$ (см. рис. 38), откуда $y_0 = -x_0$. Подставляя координаты точки $C(x_0; -x_0)$ в уравнение, которое задаёт дугу ω, имеем:

$(x_0+3)^2+(-x_0-3)^2=3^2$, $|x_0+3| = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$, $x_0 = \dfrac{3}{\sqrt{2}} - 3$.

$x_0 = -\dfrac{3}{\sqrt{2}} - 3$ не принадлежит дуге ω.

Тогда $a = x_0 - y_0 = 2x_0 = 3\sqrt{2} - 6$.

Значит, при $-3 < a < 3\sqrt{2} - 6$ система имеет два решения, при $a = 3\sqrt{2} - 6$ система имеет одно решение, при $a > 3\sqrt{2} - 6$ система решений не имеет.

Ответ: $[-3; 3\sqrt{2} - 6)$.

19. а) Пусть первоначально на доске было 13 чисел, равных 1, и 7 чисел, равных 21. Их среднее арифметическое равно

$$\frac{13 \cdot 1 + 7 \cdot 21}{20} = \frac{13 + 147}{20} = \frac{160}{20} = 8.$$

Среднее арифметическое получившихся чисел равно $\frac{7 \cdot 10{,}5}{7} = 10{,}5 > 10$.

б) Пусть с доски было стёрто k чисел, сумма оставшихся была равна S, а стала равна $\frac{S}{2}$. По условию оказались стёрты только числа, получившиеся из 1, поэтому $\frac{S+k}{20} = 8$. Отсюда $S = 160 - k$. Среднее арифметическое оставшихся чисел равно $\frac{S}{2(20-k)}$. Тогда

$$11 < \frac{160-k}{2(20-k)} < 12;\ \ 440 - 22k < 160 - k < 480 - 24k.$$

Последнее двойное неравенство запишем в виде системы неравенств

$$\begin{cases} 440 - 22k < 160 - k, \\ 160 - k < 480 - 24k, \end{cases} \quad \begin{cases} 21k > 280, \\ 23k < 320, \end{cases} \quad \begin{cases} k > 13\frac{1}{3}, \\ k < 13\frac{21}{23}. \end{cases}$$

Таких целых чисел k нет.

в) Найдём наибольшее возможное значение среднего арифметического $A = \frac{160-k}{2(20-k)}$ оставшихся чисел в зависимости от целочисленного аргумента k — первоначального количества чисел 1 на доске. Имеем:

$$A = \frac{160-k}{2(20-k)} = \frac{k-160}{2k-40} = \frac{1}{2} + \frac{70}{20-k}.$$

Число A будет наибольшим, если наибольшим будет значение аргумента k. Оценим это значение. Каждое из первоначально написанных на доске чисел было не более 30, в конце на доске осталось $20 - k$ чисел, поэтому для суммы оставшихся чисел $S = 160 - k$ должно выполняться неравенство

$$160 - k \leqslant 30(20 - k),\ \ 29k \leqslant 440,\ \ k \leqslant \frac{440}{29} < 16,\ \ k \leqslant 15.$$

Тогда

$$A \leqslant \frac{1}{2} + \frac{70}{20 - 15} = 14{,}5.$$

Приведём пример, показывающий, что среднее арифметическое оставшихся на доске чисел действительно могло стать равным 14,5. Пусть первоначально на доске было написано 15 чисел, равных 1, и 5 чисел, равных 29. Их среднее арифметическое было равно $\dfrac{15 \cdot 1 + 5 \cdot 29}{20} = 8$. Среднее арифметическое оставшихся чисел стало равно $\dfrac{5 \cdot 14{,}5}{5} = 14{,}5$.

Ответ: а) да; б) нет; в) 14,5.

Решение варианта № 8

1. За год клиент должен выплатить 24 000 рублей с процентами, то есть $24\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{18}{100}\right) = 24\,000 \cdot 1{,}18 = 28\,320$ рублей. Клиент должен ежемесячно вносить в банк одну и ту же сумму, чтобы за 12 месяцев рассчитаться по кредиту. Значит, величина его ежемесячной выплаты равна $\dfrac{28\,320}{12} = 2360$ рублей.

Ответ: 2360.

2. По графику определим, что наименьшая температура 13 мая равна 10 °C.

Ответ: 10.

3. Из рисунка 39 видно, что $AB \parallel CD$. При этом $AB = 9 - 6 = 3$, $CD = 5 - 2 = 3$. Таким образом, $AB = CD$, то есть $ABCD$ — параллелограмм. Высота $DH = 8 - 2 = 6$. Тогда $S_{ABCD} = AB \cdot DH = 3 \cdot 6 = 18$.

Ответ: 18.

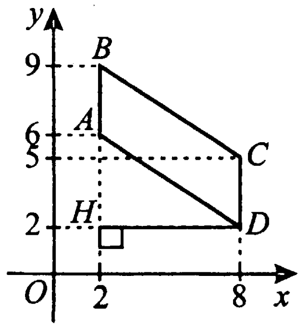


Рис. 39

4. Гарантированно произойдёт ровно одно из следующих событий.

1. Фонарик прослужит меньше года.
2. Фонарик прослужит больше года, но меньше двух.
3. Фонарик прослужит больше двух лет.

Сумма вероятностей этих событий равна 1.

События «Фонарик прослужит меньше года» и «Фонарик прослужит больше года» противоположны, вероятность второго из них по условию равна 0,92. Значит, вероятность первого по свойству противоположных событий равна 1 – 0,92 = 0,08. Заполним таблицу.

Событие	Фонарик прослужит меньше года	Фонарик прослужит больше года, но меньше двух	Фонарик прослужит больше двух лет
Вероятность	1 – 0,92 = 0,08	?	0,86

Сумма вероятностей в этой таблице равна 1, поэтому искомая вероятность равна 1 – 0,08 – 0,86 = 0,06.

Ответ: 0,06.

5. $x = \dfrac{7(x+3)}{3x+5}$. ОДЗ $3x + 5 \neq 0$; $x \neq -\dfrac{5}{3}$.

Преобразуем уравнение на ОДЗ $x(3x+5) = 7(x+3)$;
$3x^2 + 5x = 7x + 21$; $3x^2 - 2x - 21 = 0$;
$x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-21)}}{6} = \dfrac{2 \pm 16}{6}$; $x_1 = -\dfrac{7}{3}$, $x_2 = 3$. Очевидно, что оба этих значения принадлежат ОДЗ. Больший из корней равен 3.

Ответ: 3.

6. Опустим высоту BH (см. рис. 40). Из $\triangle ABH$ по определению синуса $\sin BAC = \frac{BH}{AB}$; $0{,}6 = \frac{BH}{15}$; $BH = 0{,}6 \cdot 15 = 9$.

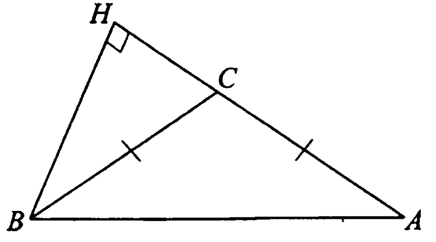


Рис. 40

Ответ: 9.

7. На интервале $(-2;\ 2)$ производная отрицательна, на интервале $(2;\ 4)$ положительна. Следовательно, на отрезке $[-2;\ 2]$ функция $f(x)$ строго убывает, а на отрезке $[2;\ 4]$ строго возрастает (см. рис. 41).

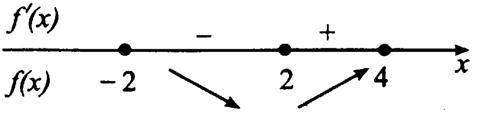


Рис. 41

Следовательно, наименьшее значение $f(x)$ принимает при $x = 2$.

Ответ: 2.

8. Опустим высоту SO пирамиды $SABCD$ (см. рис. 42). Эта пирамида является правильной, поэтому O — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$. Тогда плоскость SBD перпендикулярна плоскости основания, так как проходит через прямую SO, перпендикулярную плоскости ABC. В плоскости SBD проведём EH параллельно SO. $EH \perp ABC$ и потому EH — высота пирамиды $EABC$. С другой стороны, EH — средняя линия $\triangle SOB$, поэтому $SO = 2EH$.

$$V_{EABC} = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot EH,\ V_{SABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (2S_{ABC}) \cdot (2EH) = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}S_{ABC} \cdot EH\right) = 4V_{EABC} = 4 \cdot 2{,}7 = 10{,}8.$$

Ответ: 10,8.

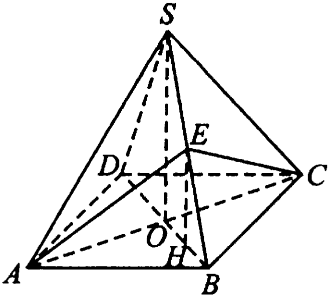


Рис. 42

9. Воспользуемся формулой косинуса двойного аргумента.

$$\frac{28(\sin^2 23^\circ - \cos^2 23^\circ)}{\cos 46^\circ} = \frac{-28(\cos^2 23^\circ - \sin^2 23^\circ)}{\cos 46^\circ} = \frac{-28 \cdot \cos 46^\circ}{\cos 46^\circ} =$$
$= -28$.

Ответ: -28.

10. Если все рейтинги издания наибольшие, то $In = Op = Tr = Q = 5$. Тогда рейтинг $R = \frac{5 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 5 + 5}{A} = \frac{40}{A}$. По условию должно выполняться $\frac{40}{A} = 100$. Следовательно, $A = \frac{40}{100} = 0{,}4$.

Ответ: 0,4.

11. Пусть цена холодильника ежегодно снижалось на $p\%$ от своего предыдущего значения. Тогда через год после выставления на продажу он стал стоить $\left(1 - \frac{p}{100}\right) \cdot 22\,000$ рублей, а через 2 года $\left(1 - \frac{p}{100}\right) \cdot \left(\left(1 - \frac{p}{100}\right) \cdot 22\,000\right) = \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 \cdot 22\,000$ рублей.

Согласно условию, получаем уравнение $\left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 \cdot 22\,000 = 19\,027{,}8$.

Отсюда $\left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 = \frac{19\,027{,}8}{22\,000} = \frac{8649}{10\,000}$. Заметим, что $\frac{8649}{10\,000} = \frac{9 \cdot 961}{100^2} = \frac{3^2 \cdot 31^2}{100^2}$. Тогда $\left(1 - \frac{p}{100}\right) = \frac{3 \cdot 31}{100}$; $\frac{p}{100} = \frac{7}{100}$; $p = 7$.

Ответ: 7.

12. Найдём производную исходной функции

$y'(x) = \left((x+8)^2\right)' e^{17-x} + (x+8)^2 \left(e^{17-x}\right)' =$

$= 2(x+8)e^{17-x} + (x+8)^2 \cdot (-1) \cdot e^{17-x} = e^{17-x}(x+8)(2-x-8) =$
$= -e^{17-x}(x+8)(x+6)$.

Ясно, что $y'(x) = 0$ при $x = -8$ и $x = -6$. Тогда $y'(x) < 0$ при $x < -8$ и $x > -6$; $y'(x) > 0$ при $-8 < x < -6$. Укажем промежутки монотонности исходной функции $y(x)$ (см. рис. 43).

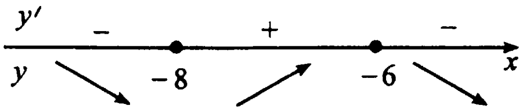


Рис. 43

Точкой максимума является $x = -6$.

Ответ: -6.

13. а) Используя формулу косинуса двойного угла $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, преобразуем исходное уравнение к виду:

$$3(1 - 2\sin^2 x) + 0{,}5 = \sin^2 x,\ 7\sin^2 x - 3{,}5 = 0;\ \sin^2 x = \frac{1}{2}.$$

$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$, или $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$.

$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$, или $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Эти семейства решений можно объединить в одно: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$.

б) С помощью числовой окружности (см. рис. 44) отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

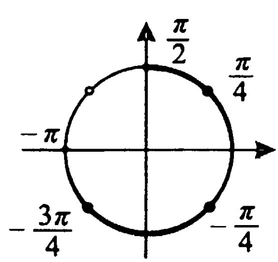


Рис. 44

Получим числа $-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$; б) $-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$.

14. а) Заметим, что треугольник SBC является прямоугольным, так как в нём $SC^2 = 520 = 120 + 400 = SB^2 + BC^2$. Аналогично треугольник SBA тоже является прямоугольным, поскольку $SA^2 = 561 = 120 + 441 = SB^2 + AB^2$. Получаем, что прямая SB перпендикулярна прямым BC и AB, а значит, перпендикулярна плоскости основания $ABCD$.

б) Отложим на прямой BA за точку A отрезок AE, равный отрезку AB (см. рис. 45). Тогда в четырёхугольнике $CDEA$ стороны CD и AE равны и параллельны. Следовательно, $CDEA$ является параллелограммом, поэтому $AC||DE$, и угол между SD и AC будет равен углу между SD и DE.

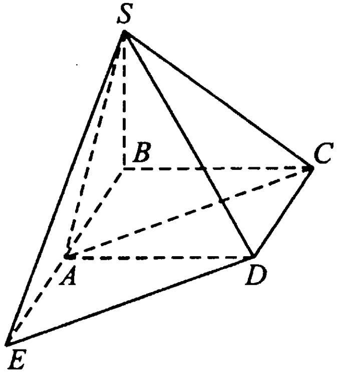


Рис. 45

По теореме Пифагора $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 441 + 400 = 841$,
$SD^2 = SB^2 + BD^2 = SB^2 + AC^2 = 120 + 841 = 961$,
$SE^2 = SB^2 + BE^2 = 120 + 1764 = 1884$.

Значит, $AC = DE = 29$, $SD = 31$.

Пусть $\angle SDE = \alpha$. По теореме косинусов для треугольника SDE имеем: $SE^2 = SD^2 + DE^2 - 2SD \cdot DE \cdot \cos\alpha$,

$$\cos\alpha = \frac{SD^2 + DE^2 - SE^2}{2SD \cdot DE} = \frac{961 + 841 - 1884}{2 \cdot 31 \cdot 29} = -\frac{41}{899}.$$

Таким образом, получили, что угол α — тупой. Значит, углом между прямыми SD и AC будет $180^\circ - \alpha = 180^\circ - \arccos\left(-\frac{41}{899}\right) = \arccos\frac{41}{899}$.

Ответ: б) $\arccos\frac{41}{899}$.

15. Пусть $t = 5^{2-x^2} + 1 > 1$, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{5t^2 - 136t + 156}{t^2} \geqslant 0,\ \frac{5\left(t - \frac{6}{5}\right)(t - 26)}{t^2} \geqslant 0,\ \left(t - \frac{6}{5}\right)(t - 26) \geqslant 0,$$

откуда $t \leqslant \frac{6}{5}$; $t \geqslant 26$.

При $t \leqslant \frac{6}{5}$ получим: $5^{2-x^2} + 1 \leqslant \frac{6}{5}$; $5^{2-x^2} \leqslant 5^{-1}$; $2 - x^2 \leqslant -1$; $x^2 \geqslant 3$, откуда $x \leqslant -\sqrt{3}$; $x \geqslant \sqrt{3}$.

При $t \geqslant 26$ получим: $5^{2-x^2} + 1 \geqslant 26$; $5^{2-x^2} \geqslant 5^2$; $2 - x^2 \geqslant 2$, откуда $x = 0$.

Решением исходного неравенства будет

$$x \leqslant -\sqrt{3};\ x = 0;\ x \geqslant \sqrt{3}.$$

Ответ: $(-\infty; -\sqrt{3}]; 0; [\sqrt{3}; +\infty)$.

16. а) Пусть Q — точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции (см. рис. 46). Точка Q, центры окружностей и точка P лежат на одной прямой, причём QP — биссектриса прямоугольного треугольника BQC. По свойству биссектрисы треугольника имеем: $\frac{BP}{PC} = \frac{QB}{QC} = \sin\angle BCQ$.

$\angle BCQ + \angle BCD = 180^\circ$, следовательно
$\angle C = \angle BCD = 180^\circ - \angle BCQ$.

$\sin C = \sin\angle BCQ$.

Итак, $\frac{BP}{PC} = \sin C$.

б) Пусть окружность с центром в точке O_1 и радиусом $R = \frac{3}{4}$ касается боковой стороны AB в точке E, а основания AD — в точке M; окружность с центром в точке O_2 и радиусом $r = \frac{1}{4}$ касается боковой

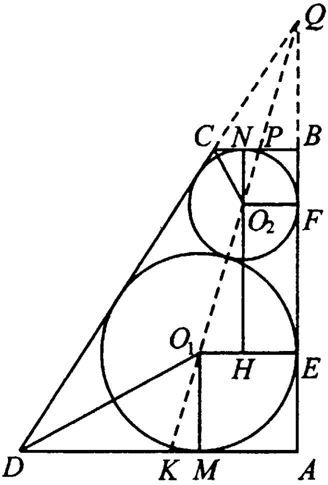


Рис. 46

стороны AB в точке F, а основания BC — в точке N. Опустим перпендикуляр O_2H из центра меньшей окружности на отрезок O_1E. Тогда $O_1H = O_1E - HE = O_1E - O_2F = R - r = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Так как прямая, соединяющая центры двух окружностей, проходит через точку касания этих окружностей, то $O_1O_2 = R+r = \frac{3}{4}+\frac{1}{4} = 1$. Значит, по теореме Пифагора $EF = O_2H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1H^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пусть $\angle AQP = \angle HO_2O_1 = \alpha$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{O_1H}{O_2H} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ и $\angle BQC = 2\alpha$, $\angle BCD = 90° + 2\alpha$, $\angle O_2CN = \frac{1}{2}\angle BCD = 45° + \alpha$. Из треугольника O_2CN находим:

$$NC = O_2N \operatorname{ctg}(45° + \alpha) = O_2N \operatorname{tg}(45° - \alpha) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}.$$

Следовательно, $BC = BN + NC = \frac{1}{4} + \frac{2-\sqrt{3}}{4} = \frac{3-\sqrt{3}}{4}$.

Аналогично $\angle O_1DM = 45° - \alpha$. Тогда

$$MD = O_1M \operatorname{ctg}(45° - \alpha) = O_1M \operatorname{tg}(45° + \alpha) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha} = \frac{6 + 3\sqrt{3}}{4}.$$

Следовательно,

$$AD = AM + MD = \frac{3}{4} + \frac{6+3\sqrt{3}}{4} = \frac{9+3\sqrt{3}}{4},$$

$$AB = AE + EF + FB = R + O_2H + r = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}.$$

Найдём CD по теореме Пифагора:

$$CD = \sqrt{AB^2 + (AD - BC)^2} = \sqrt{\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3+2\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 2 + \sqrt{3}.$$

$$P_{ABCD} = AB+BC+CD+AD = \frac{2+\sqrt{3}}{2} + \frac{3-\sqrt{3}}{4} + 2 + \sqrt{3} + \frac{9+3\sqrt{3}}{4} =$$

$$= 6 + 2\sqrt{3}.$$

Ответ: $6 + 2\sqrt{3}$.

17. Пусть кредит планируется взять на n лет. Остаток долга перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно, т.е. образует убывающую арифметическую прогрессию:

$$5,\ \frac{5(n-1)}{n}, \ldots, \frac{5\cdot 2}{n},\ \frac{5}{n},\ 0.$$

Пусть x_1, x_2, ..., x_n — выплаты (в млн рублей), который производит заёмщик с февраля по июнь каждого года. Каждая выплата состоит из постоянной части, равной $\frac{5}{n}$, и процентных денег, начисленных на остаток долга:

$$x_1 = \frac{5}{n} + \frac{25}{100}\cdot 5,$$

$$x_2 = \frac{5}{n} + \frac{25}{100}\cdot\frac{5(n-1)}{n},$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{5}{n} + \frac{25}{100}\cdot\frac{5}{n}.$$

Таким образом, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ тоже образует убывающую арифметическую прогрессию. Следовательно, наибольшим годовым платежом будет x_1. Составим и решим неравенство:

$$\frac{5}{n} + \frac{25}{100}\cdot 5 \leqslant 2{,}25,\quad \frac{5}{n} \leqslant 1,\quad n \geqslant 5.$$

Поскольку в условии задачи требуется найти минимальное значение n, то $n = 5$.

Ответ: 5.

18. Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы.

Рассмотрим два случая:

1) Если $x^2 + y^2 \geqslant 3$, получаем уравнение
$x^2+y^2+9 = x^2+y^2-3+4\sqrt{3}(x+y)$, $4\sqrt{3}x+4\sqrt{3}y = 12$, $y = -x+\sqrt{3}$.

Это уравнение при соответствующих значениях x и y, удовлетворяющих неравенству $x^2 + y^2 \geqslant 3$, задаёт два луча, выходящих из точек $A(\sqrt{3};0)$ и $B(0;\sqrt{3})$ и расположенных на прямой $y = -x + \sqrt{3}$ (см. рис. 47).

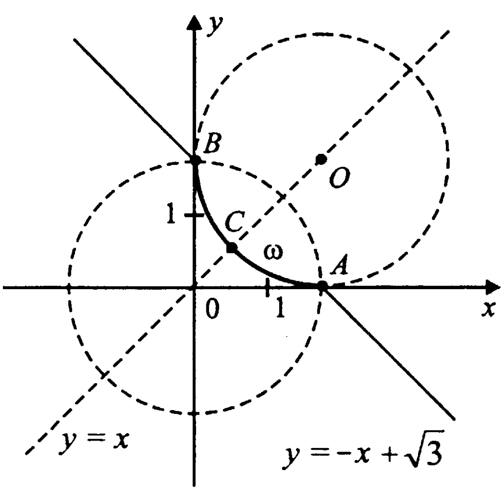


Рис. 47

2) Если $x^2 + y^2 < 3$, то получаем уравнение
$x^2+y^2+9 = -x^2-y^2+3+4\sqrt{3}(x+y)$, $2x^2-4\sqrt{3}x+2y^2-4\sqrt{3}y+6 = 0$,
$x^2 - 2\sqrt{3}x + y^2 - 2\sqrt{3}y + 3 = 0$, $(x - \sqrt{3})^2 + (y - \sqrt{3})^2 = (\sqrt{3})^2$.

Это уравнение при соответствующих значениях x и y, удовлетворяющих неравенству $x^2 + y^2 < 9$, задаёт дугу ω окружности с центром в точке $O(\sqrt{3}; \sqrt{3})$ и радиусом $\sqrt{3}$ с концами в точках A и B (см. рис. 47).

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно задаёт прямую $y = -x + a$, параллельную прямой AB или совпадающую с ней при $a = \sqrt{3}$ (в этом случае система уравнений имеет бесконечное множество решений).

Очевидно, что при $a > \sqrt{3}$ система уравнений решений иметь не будет.

При $a < \sqrt{3}$ система уравнений будет иметь больше одного решения тогда и только тогда, когда прямая $y = -x + a$ будет пересекать дугу ω в двух различных точках.

Найдём, при каком значении a прямая $y = -x + a$ касается дуги ω. Из соображений симметрии заметим, что касание будет происходить в точке C с координатами $(x_0; y_0)$, которая находится на прямой $y = x$ (см. рис. 47), откуда $y_0 = x_0$. Подставляя координаты точки $C(x_0; x_0)$ в уравнение, которое задаёт дугу ω, имеем:

$(x_0 - \sqrt{3})^2 + (x_0 - \sqrt{3})^2 = (\sqrt{3})^2$, $|x_0 - \sqrt{3}| = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $x_0 = \sqrt{3} - \sqrt{\frac{3}{2}}$, так как точка с абсциссой $x_0 = \sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{2}}$ не принадлежит дуге ω.

Тогда $a = x_0 + y_0 = 2x_0 = 2\sqrt{3} - \sqrt{6}$.

Значит, при $2\sqrt{3} - \sqrt{6} < a < \sqrt{3}$ система имеет два решения, при $a = 2\sqrt{3} - \sqrt{6}$ система имеет одно решение, при $a > 2\sqrt{3} - \sqrt{6}$ система решений не имеет.

Ответ: $(2\sqrt{3} - \sqrt{6}; \sqrt{3}]$.

19. а) Пусть первоначально на доске было 13 чисел, равных 25, и 7 чисел, равных 45. Их среднее арифметическое равно

$$\frac{13 \cdot 25 + 7 \cdot 45}{20} = \frac{325 + 315}{20} = \frac{640}{20} = 32.$$

Среднее арифметическое получившихся чисел равно $\frac{7 \cdot 22{,}5}{7} = 22{,}5 > 22$.

б) Пусть с доски было стёрто k чисел, сумма оставшихся была равна S, а стала равна $\frac{S}{2}$. По условию оказались стёрты только числа, получившиеся из 25, поэтому $\frac{S + 25k}{20} = 32$. Отсюда $S = 640 - 25k$. Среднее арифметическое оставшихся чисел равно $\frac{S}{2(20-k)}$. Тогда

$$23 < \frac{640 - 25k}{2(20-k)} < 24; \quad 920 - 46k < 640 - 25k < 960 - 48k.$$

Последнее двойное неравенство запишем в виде системы неравенств

$$\begin{cases} 920 - 46k < 640 - 25k, \\ 640 - 25k < 960 - 48k, \end{cases} \quad \begin{cases} 21k > 280, \\ 23k < 320, \end{cases} \quad \begin{cases} k > 13\frac{1}{3}, \\ k < 13\frac{21}{23}. \end{cases}$$

Таких целых чисел k нет.

в) Найдём наибольшее возможное значение среднего арифметического $A = \dfrac{640 - 25k}{2(20 - k)}$ оставшихся чисел в зависимости от целочисленного аргумента k — первоначального количества чисел 25 на доске. Имеем:

$$A = \frac{640 - 25k}{2(20 - k)} = \frac{25k - 640}{2k - 40} = \frac{25}{2} + \frac{70}{20 - k}.$$

Число A будет наибольшим, если наибольшим будет значение аргумента k. Оценим это значение. Каждое из первоначально написанных на доске чисел было не более 54, в конце на доске осталось $20 - k$ чисел, поэтому для суммы оставшихся чисел $S = 640 - 25k$ должно выполняться неравенство

$$640 - 25k \leqslant 54(20 - k), \;\; 29k \leqslant 440, \;\; k \leqslant \frac{440}{29} < 16, \;\; k \leqslant 15.$$

Тогда

$$A \leqslant \frac{25}{2} + \frac{70}{20 - 15} = 26{,}5.$$

Приведём пример, показывающий, что среднее арифметическое оставшихся на доске чисел действительно могло стать равным 26,5. Пусть первоначально на доске было написано 15 чисел, равных 25, и 5 чисел, равных 53. Их среднее арифметическое было равно $\dfrac{15 \cdot 25 + 5 \cdot 53}{20} = 32$. Среднее арифметическое оставшихся чисел стало равно $\dfrac{5 \cdot 26{,}5}{5} = 26{,}5$.

Ответ: а) да; б) нет; в) 26,5.

Решение варианта № 10

1. На теплоходе $850 + 45 = 895$ человек. Понадобится $895 : 35 = 25\frac{4}{7}$ шлюпки. Значит, наименьшее число шлюпок, которое позволит разместить всех людей, равно 26.

Ответ: 26.

2. Для нахождения наименьшей возможной удельной теплоёмкости раствора ищем точку с наименьшей ординатой. Ордината этой точки равна 4170.

Ответ: 4170.

3. Длина средней линии равна половине длины AB. Так как $AB = 10$, то длина средней линии равна 5.

Ответ: 5.

4. В первые три дня запланировано $28 \cdot 3 = 84$ доклада. В четвёртый и пятый день запланировано по $\frac{120-84}{2} = 18$ докладов (в каждый из дней). Вероятность того, что доклад профессора О. окажется запланированным на последний день конференции, равна $\frac{18}{120} = \frac{3}{20} = 0{,}15$.

Ответ: 0,15.

5. $7^{-37+5x} = 343$; $7^{-37+5x} = 7^3$; $-37 + 5x = 3$; $5x = 40$; $x = 8$.

Ответ: 8.

6. Воспользуемся теоремой синусов: $\frac{AB}{\sin C} = 2R$, где R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC; $\frac{2}{\sin 150^\circ} = 2R$; $R = 2$.

Ответ: 2.

7. Для отыскания точек максимума функции $y = f(x)$ на графике функции $y = f'(x)$ ищем точки, в которых производная меняет знак с “+” на “−”. Таких точек на отрезке $[-6;\ 10]$ две.

Ответ: 2.

8. Многогранник, вершинами которого являются точки A, B, C, D_1 — пирамида, основание которой $\triangle ABC$, а высота — DD_1 (см. рис. 48).

$$V_{ABCD_1} = \frac{1}{3}S_{ABC}\cdot DD_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}S_{ABCD}\cdot DD_1 = \frac{1}{6}\cdot AB\cdot BC\cdot DD_1 =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot 8\cdot 15\cdot 1 = 20.$$

Ответ: 20.

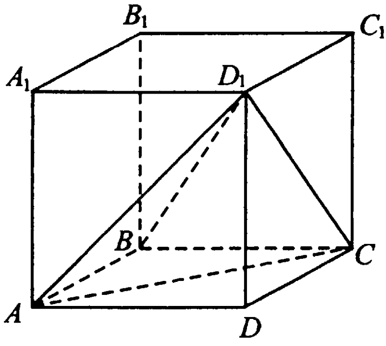


Рис. 48

9. $-38\sqrt{2}\sin(-225°) = -38\sqrt{2}(-\sin 225°) = 38\sqrt{2}\sin(180° + 45°) =$
$= -38\sqrt{2}\sin 45° = -38\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = -38.$

Ответ: -38.

10. По условию $\eta = 22\%$, $T_2 = 390$ K, $\eta = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$. Подставим данные в формулу и найдём T_1.

$$22 = \frac{T_1 - 390}{T_1} \cdot 100;\ 0{,}22T_1 = T_1 - 390;\ 0{,}78T_1 = 390;\ T_1 = 500.$$

Ответ: 500.

11. Пусть S — расстояние между городами. В первый день автомобилист проехал $\left(\dfrac{S}{4} + 40\right)$ км, во второй день — $\left(\dfrac{S}{3} + 30\right)$ км, в третий день — $\left(\dfrac{17}{60}S + 45\right)$ км. Тогда

$$\left(\frac{S}{4} + 40\right) + \left(\frac{S}{3} + 30\right) + \left(\frac{17}{60}S + 45\right) = S;$$

$$S - \left(\frac{S}{4} + \frac{S}{3} + \frac{17}{60}S\right) = 40 + 30 + 45;$$

$$\frac{2}{15}S = 115;$$
$$S = 862{,}5.$$

Ответ: 862,5.

12. $y' = 2(x-23)e^{2x-44} + 2(x-23)^2 \cdot e^{2x-44} = 2(x-22)e^{2x-44}(x-23)$.
Найдём стационарные точки из условия $y' = 0$: $x_1 = 23$, $x_2 = 2$.

Выберем наименьшее значение функции:

$y(1) = (1-23)^2 \cdot e^{2\cdot 1-44} = (-22)^2 e^{-42} = \frac{484}{e^{42}}$, $y(1) > 0$;

$y(23) = (23-23) \cdot e^{2\cdot 23-44} = 0$;
$y(22) = (22-23)^2 \cdot e^{2\cdot 22-44} = (-1)^2 \cdot e^0 = 1$.

Наименьшее значение функции равно нулю.

Ответ: 0.

13. а) Решим уравнение:

$4(\sqrt{3}\cos x - \sin x) = 2(\sqrt{3}\cos x - \sin x)\cos x$,
$(\sqrt{3}\cos x - \sin x)(2 - \cos x) = 0$

1) $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0$.

Если $\cos x = 0$, то $\sin x = 0$, что невозможно, поэтому $\cos x \neq 0$. Разделим на $\cos x$ обе части уравнения.

$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$, $x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$.

2) $\cos x = 2$. Это уравнение не имеет корней.

б) Найдём корни данного уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$, с помощью числовой окружности (см. рис. 49).

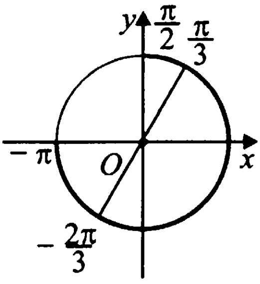


Рис. 49

$x_1 = -\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$.

$x_2 = \frac{\pi}{3}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$; б) $-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3}$.

14. а) Прямая AB лежит в плоскости (ABB_1), A_1C_1 пересекает ABB_1 в точке A_1 и тогда по признаку скрещивающихся прямых (если одна из прямых лежит в плоскости, другая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей этой прямой, то эти прямые скрещивающиеся), прямые AB и A_1C_1 скрещивающиеся (см. рис. 50).

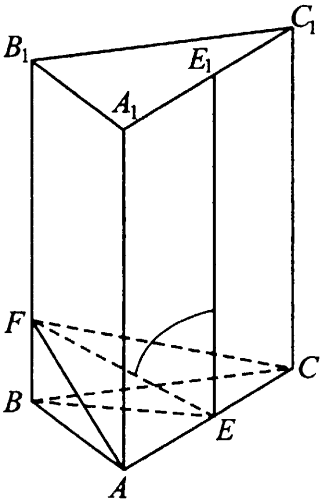


Рис. 50

Плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны как основания призмы. По условию призма прямая, значит, любое боковое ребро перпендикулярно основаниям, следовательно, является расстоянием между скрещивающимися прямыми AB и A_1C_1, что и требовалось доказать.

б) $AB = BC$, $\triangle ABC$ — равнобедренный. Проведём BE — высоту и медиану $\triangle ABC$.

FE — медиана в $\triangle AFC$, BE — проекция FE на (ABC) и $BE \perp AC$, отсюда $FE \perp AC$ (по теореме о трёх перпендикулярах).

Пусть $EE_1 \perp AC$. Тогда $\angle FEE_1$ — линейный угол двугранного угла $FACC_1$, откуда $\angle FEE_1 = 45°$.

В $\triangle FBE$: $\angle FEB = 90° - 45° = 45°$, $BE = BF$.

$\triangle FEC$: $\angle FEC = 90°$, $EF = \sqrt{FC^2 - EC^2} = \sqrt{100 - 64} = 6$.

Из $\triangle BFE$: $BE = EF \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$.

$$\frac{BF}{B_1F} = \frac{3}{5},\ B_1F = \frac{5 \cdot BF}{3},\ B_1F = \frac{5 \cdot 3\sqrt{2}}{3} = 5\sqrt{2}.$$

Итак, $BB_1 = BF + FB_1 = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.

Ответ: $8\sqrt{2}$.

15. Найдём ОДЗ: $\begin{cases} x+3>0, \\ x+3\neq 1, \\ 3-x>0, \\ 6-x>0, \\ 6-x\neq 1, \\ x+7>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3, \\ x\neq -2, \\ x<3, \\ x<6, \\ x\neq 5, \\ x>-7; \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-3;-2)\cup(-2;3).$

На ОДЗ данное неравенство равносильно неравенству
$(x+3-1)(3-x-1)(6-x-1)(x+7-1)\geqslant 0,$
$(x+2)(2-x)(5-x)(x+6)\geqslant 0.$

С помощью метода интервалов получаем
$x\in(-\infty;-6]\cup[-2;2]\cup[5;+\infty)$ (см. рис. 51).

Рис. 51

С учётом ОДЗ имеем $x\in(-2;2]$.

Ответ: $(-2;2]$.

16. а) Отрезок CD проведён параллельно NP и MQ через точку E (см. рис. 52).

$\triangle MEQ\sim\triangle NEP$ (по двум углам) $\angle NPE=\angle EMQ$, $\angle EQM=\angle ENP$ как накрест лежащие при $NP\parallel MQ$, секущие PM и NQ) $\Rightarrow \dfrac{NE}{EQ}=\dfrac{PE}{EM}$, $\dfrac{NE}{EQ}+1=\dfrac{PE}{EM}+1$, $\dfrac{NE+EQ}{EQ}=\dfrac{PE+EM}{EM}$, $\dfrac{NQ}{EQ}=\dfrac{PM}{EM}$.

$\triangle NPQ\sim\triangle EDQ$ (по двум углам), $\dfrac{NP}{ED}=\dfrac{NQ}{EQ}$.

$\triangle NPM\sim\triangle CEM$ (по двум углам), $\dfrac{NP}{CE}=\dfrac{PM}{EM}$.

Но $\dfrac{PM}{EM}=\dfrac{NQ}{EQ}\Rightarrow\dfrac{NP}{CE}=\dfrac{NP}{ED}\Rightarrow CE=ED$.

$\triangle MFA\sim\triangle CEA$ (по двум углам) $\Rightarrow\dfrac{MF}{CE}=\dfrac{FA}{EA}$.

Аналогично $\dfrac{FQ}{ED}=\dfrac{FA}{EA}$, $\dfrac{FQ}{ED}=\dfrac{MF}{CE}$, и так как $CE=ED$, то $MF=FQ$, что и требовалось доказать.

$\frac{CE}{NK} = \frac{EA}{AK} = \frac{ED}{KP}, \Rightarrow NK = KP$, что и требовалось доказать.

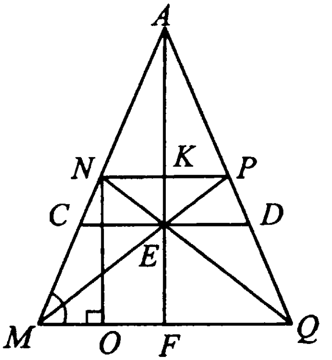


Рис. 52

б) $S_{MNPQ} = \frac{NP + MQ}{2} \cdot NO$, где $NO \perp MQ$.

В $\triangle MNO$: $NO = MN \cdot \sin 60° = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.

По условию $\frac{MQ}{NP} = \frac{3}{2}$, $MQ = 12$ см. Тогда $NP = \frac{2MQ}{3} = \frac{2 \cdot 12}{3} = 8$.

$S_{MNPQ} = \frac{12 + 8}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$.

Ответ: $25\sqrt{3}$.

17. Пусть вклад лежал под 5% годовых m лет и n лет вклад лежал под 10% годовых. Тогда после $m+n$ лет вклад составил $640\,000 \cdot 1{,}1^n \cdot 1{,}05^m$. Пролежав ещё год, вклад достиг $640\,000 \cdot 1{,}1^n \cdot 1{,}05^m \cdot 1{,}25 = 800\,000 \cdot 1{,}1^n \cdot 1{,}05^m$, при этом общий срок хранения равен $(m + n + 1)$ лет.

Составим уравнение

$800\,000 \cdot 1{,}1^n \cdot 1{,}05^m = 1\,173\,942$.

Домножив обе части на $10^n \cdot 100^m$, получим

$800\,000 \cdot 11^n \cdot 105^m = 1\,173\,942 \cdot 10^n \cdot 100^m$,

$400\,000 \cdot 11^n \cdot 105^m = 586\,971 \cdot 10^n \cdot 100^m$.

Обе части равенства — натуральные числа, и они единственным образом раскладываются на простые множители.

$400\,000 \cdot 11^n \cdot 3^m \cdot 5^m \cdot 7^m = 586\,971 \cdot 10^n \cdot 100^m$,

$586\,971 = 11^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2$,

отсюда $400\,000 \cdot 11^n \cdot 3^m \cdot 5^m \cdot 7^m = 7^2 \cdot 3^2 \cdot 11^3 \cdot 10^n \cdot 100^m$.

Степени чисел 7 и 3 в левой и правой части равенства одинаковы и равны 2, степень числа 11 равна 3. Значит, $n = 3$, $m = 2$. Проверкой нужно убедиться, что при этом равенство верно.

Общий срок хранения равен $m + n + 1 = 2 + 3 + 1 = 6$.

Ответ: 6.

18. Область определения исходной функции задаётся системой неравенств

$$\begin{cases} a > 0, \\ x > 0, \\ a \neq 1, \\ x \neq 1, \\ \log_a x > 0, \\ \sqrt{x}\log_a 3 - \sqrt{a}\log_a 3 - x^{\frac{1}{2}}x^{\log_x(\log_a x)} + \sqrt{a}\log_a x > 0. \end{cases}$$

Преобразуем последнее неравенство

$\log_a 3(\sqrt{x} - \sqrt{a}) - \sqrt{x}\log_a x + \sqrt{a}\log_a x > 0,$

$\log_a 3(\sqrt{x} - \sqrt{a}) - \log_a x(\sqrt{x} - \sqrt{a}) > 0,$

$(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\log_a 3 - \log_a x) > 0.$

На ОДЗ это неравенство равносильно неравенству

$(x - a)(x - 3)(a - 1) < 0.$

Если $a < 1$, то $x \in (0; a) \cup (3; +\infty)$, при этом при $x > 3$ условие $\log_a x > 0$ нарушено для всех значений x, а на промежутке $(0; a)$ нет целых чисел.

Пусть $a > 1$, тогда $(x - a)(x - 3) < 0$.

Если $a > 3$, то $x \in (3; a)$ и 4 целых корня будет при $a \in (7; 8]$, так как в промежуток $(3; a)$ должны войти целые числа 4, 5, 6 и 7, а 8 войти не должно.

При $1 < a \leqslant 3$ целых корней на промежутке $(a; 3)$ не больше 2.

Ответ: $(7; 8]$.

19. а) Если у садовника нет дополнительных ограничений, то на каждом из 6 мест для посадки может быть саженец любого вида, то есть для каждого места — 5 вариантов. Тогда общее число вариантов равно $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 15\,625$.

б) Если представлены саженцы всех видов деревьев, то какого-то вида — 2 дерева, а остальных — по 1. Выбрать вид, представленный 2 деревьями, можно 5 способами. Предположим, что соответствующий выбор сделан и у садовника 6 саженцев, 2 из которых одинаковы. Временно будем считать все саженцы различными. Тогда их можно высадить $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ способами. Однако на самом деле каждый способ мы посчитали дважды, так как все способы делятся на пары, отличающиеся только относительным порядком одинаковых саженцев.

Значит, способов посадить выбранные саженцы $\frac{720}{2} = 360$. Зная, что выбрать саженцы можно 5 способами, получим общее число способов посадки, равное $5 \cdot 360 = 1\,800$.

в) Заметим, что двумя определёнными видами саженцев можно засадить ряд $2^6 - 2 = 62$ способами. (2^6 — количество расстановок, используются саженцы не более 2 видов, 2 способа с саженцами одного вида).

Два вида из 5 можно выбрать $C_5^2 = 10$ способами.

Значит, существует $62 \cdot 10 = 620$ способов, когда используются саженцы ровно 2 видов, и 5 способов — ровно 1 вида. Значит, 625 способов можно применить при посадке саженцев менее 3 видов, а всего 15 625 способов. Таким образом, искомых способов $15\,625 - 625 = 15\,000$.

Ответ: а) 15 625 б) 1 800 в) 15 000

Решение варианта № 11

1. Билеты для 18 школьников стоят столько же, сколько стоят билеты для 9 взрослых. Поэтому стоимость билетов для 18 школьников и 2 взрослых равна стоимости билетов для 11 взрослых: $120 \cdot 11 = 1320$.

Ответ: 1320.

2. Число посетителей сайта впервые превысило 40 000 в марте.

Ответ: 3.

3. Из рисунка видно, что диаметр окружности, описанной около $\triangle ABC$, равен 7, следовательно, радиус описанной вокруг треугольника окружности равен 3,5.

Ответ: 3,5.

4. Оба терминала неисправны с вероятностью $0{,}06 \cdot 0{,}06 = 0{,}0036$. Тогда вероятность того, что хотя бы один терминал исправен — есть вероятность противоположного события, равна $1 - 0{,}0036 = 0{,}9964$.

Ответ: 0,9964.

5. $(5x + 11)^2 = (5x + 24)^2$; $(5x + 11 - 5x - 24)(5x + 11 + 5x + 24) = 0$; $10x + 35 = 0$; $x = -3{,}5$.

Ответ: $-3{,}5$.

6. Пусть O — центр вписанной окружности и OH — высота равностороннего треугольника AOB (см. рис. 53). Тогда

$$AB = 2AH = 2OH \operatorname{ctg} \angle OAH = 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ = 4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 4.$$

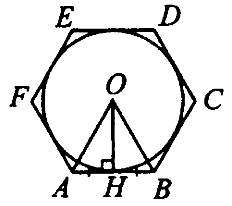


Рис. 53

Ответ: 4.

7. Промежутки возрастания функции $y = f(x)$ совпадают с теми промежутками, где $f'(x) > 0$. Найдём сумму абсцисс целых точек, входящих в эти промежутки: $-2 + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 18$.

Ответ: 18.

8. Площадь поверхности шара равна учетверённой площади большого круга, то есть $4 \cdot 13{,}5 = 54$.

Ответ: 54.

9. $\dfrac{27}{\cos^2 85^\circ + \sin^2 275^\circ} = \dfrac{27}{\cos^2(90^\circ - 5^\circ) + \sin^2(270^\circ + 5^\circ)} =$

$= \dfrac{27}{\sin^2 5^\circ + \cos^2 5^\circ} = 27.$

Ответ: 27.

10. $l = l_0(1 + \alpha t^\circ)$; $l - l_0 = l_0 \alpha t^\circ$; $3{,}24 = 6000 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot t^\circ$; $324 = 7{,}2t^\circ$; $t^\circ = 45^\circ$.

Ответ: 45.

11. Пусть в книге x страниц. Тогда Оля прочитает книгу за $\dfrac{x}{50}$ ч, а Дима — за $\dfrac{x}{30}$ ч. Из условия получаем уравнение $\dfrac{x}{30} - \dfrac{x}{50} = \dfrac{36}{60}$. Отсюда $5x - 3x = 90$; $x = 45$.

Ответ: 45.

12. Найдём стационарные точки из условия $y' = 0$.

$y' = 6x^2 - 150 = 6(x^2 - 25) = 6(x-5)(x+5)$; $(x-5)(x+5) = 0$; $x = \pm 5$.
Так как $-5 \notin [2; 10]$, то наименьшее значение функции ищем среди чисел $y(2)$, $y(5)$, $y(10)$:

$y(2) = 2 \cdot 2^3 - 150 \cdot 2 = 16 - 300 = -284$;

$y(5) = 2 \cdot 5^3 - 150 \cdot 5 = 250 - 750 = -500$;

$y(10) = 2 \cdot 10^3 - 150 \cdot 10 = 500$.

Наименьшее значение функции равно -500.

Ответ: -500.

13. а) Представим $4 = 4(\sin^2 3x + \cos^2 3x)$.

Получим $\sin^2 3x + 3\cos^2 3x - 4\sin 3x \cdot \cos 3x = 0$.

$\cos^2 3x \neq 0$ (если $\cos^2 3x = 0$, то равенство не выполняется). Разделим обе части уравнения на $\cos^2 3x$.

$\mathrm{tg}^2\, 3x + 3 - 4\,\mathrm{tg}\, 3x = 0$, $\mathrm{tg}^2\, 3x - 4\,\mathrm{tg}\, 3x + 3 = 0$.

$\mathrm{tg}\, 3x = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1$.

$\mathrm{tg}\, 3x = 1$, $3x = \mathrm{arctg}\, 1 + \pi n$; $x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{3}$, $n \in Z$.

$\mathrm{tg}\, 3x = 3$, $3x = \mathrm{arctg}\, 3 + \pi k$; $x = \dfrac{1}{3}\mathrm{arctg}\, 3 + \dfrac{\pi k}{3}$, $k \in Z$.

б) Найдём решения уравнения, принадлежащие промежутку $[0; 1]$. Так как $0 < \mathrm{arctg}\, 3 < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < \dfrac{1}{3}\mathrm{arctg}\, 3 < \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{\pi}{3} < 1$, то $\dfrac{1}{3}\mathrm{arctg}\, 3$ принадлежит промежутку $[0; 1]$. Аналогично $0 < \dfrac{\pi}{12} < \dfrac{\pi}{4} < 1$, поэтому $\dfrac{\pi}{12}$ принадлежит промежутку $[0; 1]$. Другие решения не попадут в промежуток $[0; 1]$, так как они получаются из чисел $\dfrac{1}{3}\mathrm{arctg}\, 3$ и $\dfrac{\pi}{12}$ (меньше 1) прибавлением числа $\dfrac{\pi}{3}$, которое больше 1.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{3}$, $n \in Z$; $\dfrac{\mathrm{arctg}\, 3}{3} + \dfrac{\pi k}{3}$, $k \in Z$; б) $\dfrac{\pi}{12}$, $\dfrac{\mathrm{arctg}\, 3}{3}$.

14. а) Прямая AB лежит в плоскости ABB_1, прямая A_1C_1 пересекает плоскость ABB_1 в точке A_1 и тогда по признаку скрещивающихся прямых AB и A_1C_1 — скрещивающиеся прямые (см. рис. 54).

Так как прямые AB и A_1C_1 лежат в плоскостях оснований данной призмы, то по определению прямой, перпендикулярной плоскости, прямая BB_1 перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости ABC, и любой прямой, лежащей в плоскости $A_1B_1C_1$. Следовательно, BB_1 является общим перпендикуляром скрещивающихся прямых AB и A_1C_1, то есть расстояние между ними равно боковому ребру призмы, что и требовалось доказать.

б) Проведём $BH \perp AC$, тогда BH — высота и медиана в равнобедренном $\triangle ABC$. KH — медиана $\triangle AKC$. BH — проекция KH на плоскость ACB и $BH \perp AC$. Следовательно, $KH \perp AC$ (по теореме о трёх перпендикулярах).

$\angle KHB$ — линейный угол двугранного угла $KACB$, откуда $\angle KHB = 45^\circ$.

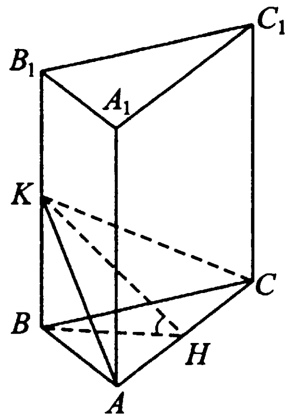


Рис. 54

В ΔKCH катет $KH = \sqrt{KC^2 - CH^2} = \sqrt{64-8} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$.

Из ΔKBH катет $BK = KH \cdot \sin 45° = 2\sqrt{14} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{7}$.

По условию $BK : B_1K = 2 : 3$. $B_1K = \frac{3}{2}BK$, $B_1K = 3\sqrt{7}$. $BB_1 = BK + B_1K = 5\sqrt{7}$.

Ответ: $5\sqrt{7}$.

15. ОДЗ:

$$\begin{cases} 3-x>0, \\ 3-x\neq 1, \\ x+3>0, \\ 5-x>0, \\ x+5>0, \\ x+5\neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x<3, \\ x\neq 2, \\ x>-3, \\ x<5, \\ x>-5, \\ x\neq -4; \end{cases} \quad (-3;2)\cup(2;3).$$

Решаем неравенство методом рационализации (см. рис. 55).

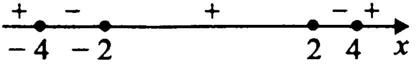


Рис. 55

На ОДЗ знак $\log_a b$ совпадает со знаком $(a-1)(b-1)$, поэтому исходное неравенство на ОДЗ равносильно неравенству $(3-x-1)(x+3-1)(x+5-1)(5-x-1) \leqslant 0$.

$(2-x)(x+2)(x+4)(4-x) \leqslant 0$.

$\Rightarrow x \in [-4;-2] \cup [2;4]$.

С учётом ОДЗ получаем $x \in (-3; -2] \cup (2; 3)$.

Ответ: $(-3; -2] \cup (2; 3)$.

16. а) Высота $\triangle MNF$ $NK \perp MF \Rightarrow$
$\triangle MNF$ и $\triangle FNK$ — прямоугольные, они подобны (по общему углу F) (см. рис 56).

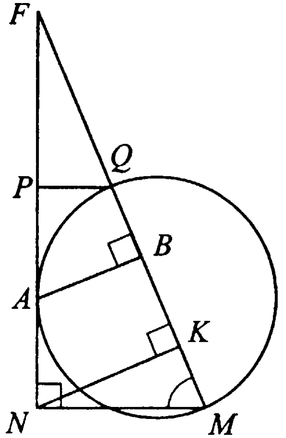


Рис. 56

б) По теореме о секущей и касательной имеем:
$FA^2 = MF \cdot FQ$.

Проведём $AB \perp MQ$. Тогда AB — расстояние от точки A до прямой MQ.

$\triangle MNF$, $\triangle ABF$, $\triangle PQF$ — прямоугольные, их острый угол F — общий, значит, они подобны.

$$\triangle ABF \sim \triangle MNF \Rightarrow \frac{AB}{MN} = \frac{FA}{FM}, AB = \frac{FA \cdot MN}{FM}.$$

$$\triangle ABF \sim \triangle PQF \Rightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{FA}{FQ}, AB = \frac{FA \cdot PQ}{FQ}.$$

Тогда получим

$$AB^2 = \frac{FA \cdot MN \cdot FA \cdot PQ}{FM \cdot FQ} = \frac{FA^2 \cdot MN \cdot PQ}{FM \cdot FQ} = MN \cdot PQ = 24.$$

$AB = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

Ответ: $2\sqrt{6}$.

17. Пусть вклад лежал под 4% годовых p лет и k лет вклад лежал под 8% годовых. Тогда после $p+k$ лет вклад составил $200\,000 \cdot 1{,}04^p \cdot 1{,}08^k$. Пролежав ещё год, вклад достиг $200\,000 \cdot 1{,}04^p \cdot 1{,}08^k \cdot 1{,}25 = 250\,000 \cdot 1{,}04^p \cdot 1{,}08^k$, при этом общий срок хранения равен $(k+p+1)$ лет.

Составим уравнение

$250\,000 \cdot 1{,}04^p \cdot 1{,}08^k = 292\,032$.

Домножив обе части на $100^p \cdot 100^k$, получим

$250\,000 \cdot 104^p \cdot 108^k = 292\,032 \cdot 100^k \cdot 100^p$,

$15\,625 \cdot 108^k \cdot 104^p = 18\,252 \cdot 100^k \cdot 100^p$,

$5^6 \cdot 2^{3p+2k} \cdot 3^{3k} \cdot 13^p = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 13^2 \cdot 100^{p+k}$,

$5^6 \cdot 2^{3p+2k} \cdot 3^{3k} \cdot 13^p = 2^{2+2p+2k} \cdot 5^{2p+2k} \cdot 3^3 \cdot 13^2$,

$p = 2,\ 3k = 3,\ k = 1$.

Проверкой можно убедиться, что при этих значениях p и k равенство верное.

Общее количество лет $k+p+1 = 1+2+1 = 4$.

Ответ: 4.

18. Из свойств логарифма и значений корня 10-й степени найдём ОДЗ данной функции, которая определяется системой

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ a > 0, \\ a^8x^{0,25} - x^{0,25+x\log_x a} + a^x\sqrt{a^{\frac{1}{2}}} - a^{8,25} \geqslant 0. \end{cases}$$

Преобразуем последнее неравенство данной системы.

$$a^8x^{0,25} - x^{0,25+x\log_x a} + a^x\sqrt{a^{\frac{1}{2}}} - a^{8,25} \geqslant 0,$$

$a^8x^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{4}}x^{x\log_x a} + a^x \cdot a^{\frac{1}{4}} - a^8 \cdot a^{\frac{1}{4}} \geqslant 0.$

Заметим, что $x^{x\log_x a} = (x^{\log_x a})^x = a^x$.

$x^{\frac{1}{4}}(a^8 - a^x) + a^{\frac{1}{4}}(a^x - a^8) \geqslant 0$, $(a^x - a^8)(a^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{4}}) \geqslant 0$. На ОДЗ это неравенство равносильно неравенству $(a-1)(x-8)(a-x) \geqslant 0$, $(x-8)(x-a)(a-1) \leqslant 0\,(1)$.

При $a < 1$, $(a-1) < 0$ и неравенство (1) примет вид $(x-8)(x-a) \geqslant 0$. Значит, $x \in (0; a] \cup [8; +\infty)$ и целых корней бесконечно много.

При $a > 1$, $a - 1 > 0$ и неравенство (1) примет вид $(x-8)(x-a) \leqslant 0$, откуда либо $x \in [a; 8]$, либо $x \in [8; a]$.

При $a \leqslant 8$ ровно 7 целых корней будет при $a \in (1; 2]$, так как в промежуток $[a; 8]$ должны войти целые числа от 2 до 8, а число 1 войти не должно.

При $a \geqslant 8$ ровно 7 целых корней будет при $a \in [14; 15)$, так как в промежуток $[8; a]$ должны войти целые числа от 8 до 14, а число 15 войти не должно.

При $a = 1$ непосредственно убеждаемся, что любое $x > 0$ и $x \neq 1$ принадлежит области определения функции. В таком случае получается в области определения бесконечно много целых чисел.

Ответ: $(1; 2] \cup [14; 15)$.

19. а) Если бы кресла стояли в ряд, то первое кресло можно было бы выбрать 7 способами, затем второе — шестью, третье — пятью. Всего было бы $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 5\,040$ способов.

Однако, за счёт поворота каждый способ при таком подсчёте считается шесть раз, то есть $\frac{5\,040}{6} = 840$ (способов).

б) Если представлены кресла 5 видов, то четыре вида представлены 1 креслом, а один вид — двумя. Один вид, представленный двумя креслами, мы можем выбрать 7 способами. Затем из 6 оставшихся выбираем 4 вида, это можно сделать таким же числом способов, каким можно выбрать 2 неиспользуемых вида из 6, то есть $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ способами.

Значит, существует 105 способов выбрать 1 вид, представленный 2 креслами, и 4 вида, представленные 1 креслом. Пусть описанный выше выбор сделан, и у нас уже отобрано 6 кресел. Сначала расставим их в ряд, считая различными. Получим $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ способов. Теперь учтём то, что один вид повторяется дважды. Получим $\frac{720}{2} = 360$ способов. Наконец, учтём повороты и получим $\frac{360}{6} = 60$ способов. Значит, всего $60 \cdot 105 = 6\,300$ способов.

в) Возможны 4 случая.

1) Все кресла различны. Тогда соответствующих способов 840 (см. пункт а).

2) Четыре вида представлены 1 креслом, а один вид двумя. Таких способов 6 300 (см. пункт б).

3) Три вида представлены 2 креслами. Выбрать 3 вида кресел из 7 видов можно $C_7^3 = 35$ способами. Их можно расставить в ряд $6! = 720$ способами. Учитывая повторяющиеся кресла, получим $\frac{720}{8} = 90$, а учитывая повороты $\frac{90}{6} = 15$ способов. Всего в этом случае получается $15 \cdot 35 = 525$ способов.

4) 2 вида кресел представлены по 2 кресла и 2 различного вида по 1 креслу. Этот случай аналогичен случаю б), то есть 6 300 способов.

Итого: общее число способов равно $840 + 6\,300 + 525 + 6\,300 = 13\,965$.

Ответ: а) 840; б) 6 300; в) 13 965.

Решение варианта № 12

1. Стоимость билетов для 12 школьников равна стоимости билетов для 6 взрослых. Значит, билеты для 12 школьников и 4 взрослых стоят столько же, сколько для 10 взрослых: $1320 \cdot 10 = 13\,200$.

Ответ: 13 200.

2. Менее 3000 автомобилей было продано в июне.

Ответ: 6.

3. Из рисунка видно, что диаметр окружности равен 9. Значит, радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 4,5.

Ответ: 4,5.

4. Найдём вероятность противоположного события «обе лампы в течение года не перегорят»: $0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$. Тогда вероятность того, что хотя бы одна лампа в течение года не перегорит, равна $1 - 0{,}16 = 0{,}84$.

Ответ: 0,84.

5. $(3x - 19)^2 = (3x + 22)^2$; $(3x - 19)^2 - (3x + 22)^2 = 0$;
$(3x - 19 - 3x - 22)(3x - 19 + 3x + 22) = 0$; $6x + 3 = 0$; $x = -0{,}5$.

Ответ: $-0{,}5$.

6. Пусть O — центр окружности, вписанной в правильный шестиугольник $ABCDEF$ (см. рис. 57).

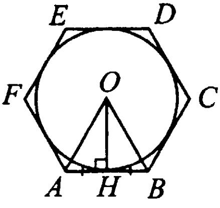


Рис. 57

Угол AOB равен $60°$ и $OA = OB$, поэтому треугольник AOB является правильным. OH — радиус вписанной окружности. С другой стороны, OH — высота правильного треугольника. Тогда $OH = \dfrac{AO\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{4} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$.

Ответ: 0,75.

7. Промежутки убывания функции $y = f(x)$ совпадают с теми промежутками, на которых $f'(x) < 0$. Найдём сумму абсцисс целых точек, входящих в эти промежутки:
$-4 + (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 18.$

Ответ: 18.

8. Площадь поверхности шара равна учетверённой площади большого круга. Отсюда площадь большого круга равна $\frac{1}{4} \cdot 12 = 3$.

Ответ: 3.

9. $$\frac{38}{\sin^2 31^\circ + \cos^2 571^\circ} = \frac{38}{\sin^2 31^\circ + \cos^2(3 \cdot 180^\circ + 31^\circ)} =$$
$$= \frac{38}{\sin^2 31^\circ + \cos^2(180^\circ + 31^\circ)} = \frac{38}{\sin^2 31^\circ + \cos^2 31^\circ} = 38.$$

Ответ: 38.

10. $l = l_0(1 + \alpha t^\circ)$; $l - l_0 = l_0 \alpha t^\circ$; $3{,}84 = 8000 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot t^\circ$; $384 = 9{,}6t^\circ$; $t^\circ = 40^\circ$.

Ответ: 40.

11. Пусть в книге x страниц. Тогда Аня прочитает книгу за $\frac{x}{42}$ ч, а Таня — за $\frac{x}{36}$ ч. Из условия получаем уравнение $\frac{x}{36} - \frac{x}{42} = \frac{50}{60}$. Отсюда $7x - 6x = 210$; $x = 210$.

Ответ: 210.

12. Найдём стационарные точки из условия $y' = 0$.

$y' = 15x^2 - 135 = 15(x^2 - 9) = 15(x - 3)(x + 3)$; $(x - 3)(x + 3) = 0$; $x = \pm 3$. Так как $3 \notin [-8; 0]$, то наименьшее значение функции ищем среди чисел $y(-8)$, $y(-3)$, $y(0)$:
$y(-8) = 5 \cdot (-8)^3 - 135 \cdot (-8) + 20 < 0;$
$y(-3) = 5 \cdot (-3)^3 - 135 \cdot (-3) + 20 = 290;$
$y(0) = 5 \cdot 0^3 - 135 \cdot 0 + 20 = 20.$

Наибольшее значение функции равно 290.

Ответ: 290.

13. а) Решим уравнение:

$4\sqrt{3}\sin x - 2\sqrt{3}\sin^2 x = \sin 2x - 4\cos x,$
$2\sqrt{3}\sin x(2 - \sin x) = 2\sin x \cos x - 4\cos x,$
$\sqrt{3}\sin x(2 - \sin x) = -\cos x(2 - \sin x),$
$(2 - \sin x) \cdot (\sqrt{3}\sin x + \cos x) = 0.$

1) $2 - \sin x = 0$, $\sin x = 2$. Это уравнение корней не имеет.

2) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$.

Если $\cos x = 0$, то $\sin x = \pm 1$ и такие значения x не являются корнями уравнения. Значит, $\cos x \neq 0$. Поделим на $\cos x$ обе части уравнения.

$\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 1 = 0$,

$\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$,

$x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

б) Отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ принадлежат корни уравнения:

$x_1 = -\frac{\pi}{6}$;

$x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ (см. рис. 58).

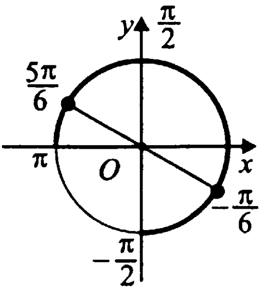


Рис. 58

Ответ: а) $-\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$; б) $-\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$.

14. а) Прямая MN лежит в плоскости MNN_1, M_1P_1 пересекает плоскость MNN_1 в точке M_1 и тогда по признаку скрещивающихся прямых (если одна из прямых лежит в плоскости, другая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей этой прямой, то эти прямые скрещивающиеся), прямые MN и M_1P_1 — скрещивающиеся.

Прямые MN и M_1P_1 лежат в плоскостях оснований прямой призмы, а боковое ребро NN_1 перпендикулярно основаниям. По определению прямой, перпендикулярной плоскости, прямая NN_1 перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости MNP, и любой прямой, лежащей в плоскости $M_1N_1P_1$. Следовательно, NN_1 является общим перпендику-

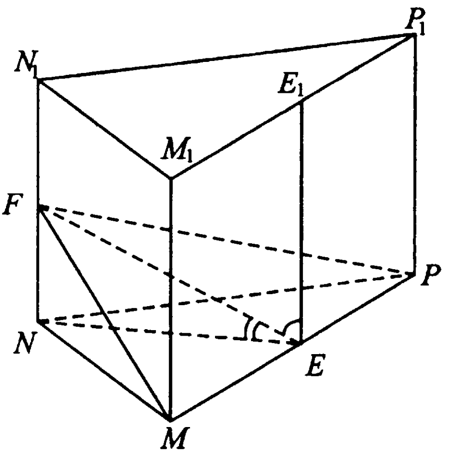


Рис. 59

ляром скрещивающихся прямых MN и M_1P_1, то есть расстояние между ними равно боковому ребру призмы, что и требовалось доказать.

б) $MN = NP$, $\triangle MNP$ — равнобедренный. Проведём NE — высоту и медиану $\triangle MNP$.

FE — медиана в $\triangle MFP$, NE — проекция FE на плоскость MNP и $NE \perp MP$, отсюда $FE \perp MP$ (по теореме о трёх перпендикулярах).

Пусть $EE_1 \perp MP$, тогда $\angle FEE_1$ — линейный угол двугранного угла $FMPP_1$, откуда $\angle FEE_1 = 60°$.

В $\triangle FNE$: $\angle FEN = 90° - 60° = 30°$.

$\triangle FEP$: $\angle FEP = 90°$, $EF = \sqrt{FP^2 - EP^2} = \sqrt{256 - 144} = 4\sqrt{7}$,

NE из $\triangle NFE$: $NF = \frac{1}{2} \cdot EF = 2\sqrt{7}$.

$$\frac{NF}{N_1F} = \frac{2}{3},\ N_1F = \frac{3 \cdot NF}{2},\ N_1F = \frac{3 \cdot 2\sqrt{7}}{2} = 3\sqrt{7}.$$

Итак, $NN_1 = NF + FN_1 = 2\sqrt{7} + 3\sqrt{7} = 5\sqrt{7}$.

Ответ: $5\sqrt{7}$.

15. Найдём ОДЗ: $\begin{cases} x+4>0, \\ x+4 \neq 1, \\ 4-x>0, \\ 5-x>0, \\ 5-x \neq 1, \\ x+6>0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-4, \\ x \neq -3, \\ x<4, \\ x<5, \\ x \neq 4, \\ x>-6; \end{cases} \Rightarrow x \in (-4;-3) \cup (-3;4).$

Решим неравенство методом рационализации.

$(x+4-1)(4-x-1)(5-x-1)(x+6-1) \leqslant 0$, $(x+3)(3-x)(4-x)(x+5) \leqslant 0$

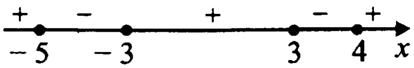


Рис. 60

С помощью метода интервалов получаем (см. рис. 60) $x \in [-5; -3] \cup [3; 4]$.

С учётом ОДЗ получаем $(-4; -3) \cup [3; 4)$.

Ответ: $(-4; -3) \cup [3; 4)$.

16. а) Отрезок MN проведён параллельно BC и AD через точку E (см. рис. 61).

$\triangle AED \sim \triangle BEC$ (по двум углам) $\angle BCE = \angle EAD$, $\angle EDA = \angle EBC$ (как накрест лежащие при $BC \parallel AD$), секущие CA и BD) $\Rightarrow \dfrac{BE}{ED} = \dfrac{CE}{EA}$, $\dfrac{BE}{ED} + 1 = \dfrac{CE}{EA} + 1$, $\dfrac{BE + ED}{ED} = \dfrac{CE + EA}{EA}$, $\dfrac{BD}{ED} = \dfrac{CA}{EA}$.

$\triangle BCD \sim \triangle END$ (по двум углам), $\dfrac{BC}{EN} = \dfrac{BD}{ED}$.

$\triangle BCA \sim \triangle MEA$ (по двум углам), $\dfrac{BC}{ME} = \dfrac{CA}{EA}$.

Но $\dfrac{CA}{EA} = \dfrac{BD}{ED} \Rightarrow \dfrac{BC}{ME} = \dfrac{BC}{EN} \Rightarrow ME = EN$.

$\triangle AFP \sim \triangle MEP$ (по двум углам) $\Rightarrow \dfrac{AF}{ME} = \dfrac{FP}{EP}$.

Аналогично $\dfrac{FD}{EN} = \dfrac{FP}{EP}$, $\dfrac{FD}{EN} = \dfrac{AF}{ME}$, и так как $ME = EN$, то $AF = FD$, что и требовалось доказать.

$\dfrac{ME}{BK} = \dfrac{EP}{PK} = \dfrac{EN}{KC}$, $\Rightarrow BK = KC$, что и требовалось доказать.

б) $S_{ABCD} = \dfrac{BC + AD}{2} \cdot BO$, где $BO \perp AD$.

В $\triangle ABO$: $BO = AB \cdot \sin 45^\circ = 10 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$.

По условию $\dfrac{AD}{BC} = \dfrac{4}{3}$, $AD = 18$ см. Тогда $BC = \dfrac{3AD}{4} = \dfrac{3 \cdot 18}{4} = \dfrac{27}{2}$.

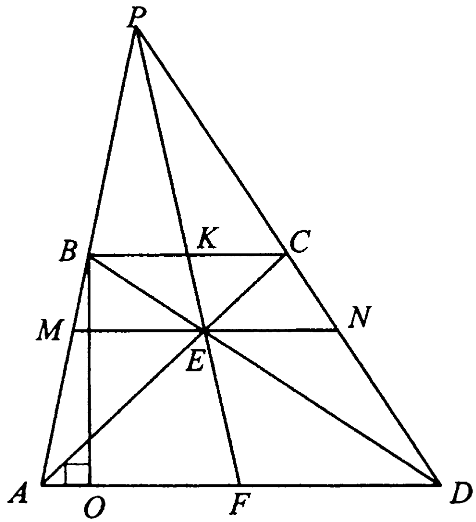


Рис. 61

$$S_{ABCD} = \frac{\left(\frac{27}{2} + 18\right)}{2} \cdot 5\sqrt{2} = 78{,}75\sqrt{2}.$$

Ответ: $78{,}75\sqrt{2}$.

17. Пусть вклад лежал под 5% годовых m лет и n лет вклад лежал под 10% годовых. Тогда после $m+n$ лет вклад составил $400\,000 \cdot 1{,}1^n \cdot 1{,}05^m$. Пролежав ещё год, вклад достиг $400\,000 \cdot 1{,}1^n \cdot 1{,}05^m \cdot 1{,}2 = 480\,000 \cdot 1{,}1^n \cdot 1{,}05^m$, при этом общий срок хранения равен $(m+n+1)$ лет.

Составим уравнение

$480\,000 \cdot 1{,}1^n \cdot 1{,}05^m = 640\,332.$

Домножив обе части на $10^n \cdot 100^m$, получим

$480\,000 \cdot 11^n \cdot 105^m = 640\,332 \cdot 10^n \cdot 100^m,$

$160\,000 \cdot 11^n \cdot 105^m = 213\,444 \cdot 10^n \cdot 100^m.$

Обе части равенства — натуральные числа, и они единственным образом раскладываются на простые множители.

$160\,000 \cdot 11^n \cdot 3^m \cdot 5^m \cdot 7^m = 213\,444 \cdot 10^n \cdot 100^m,$

$213\,444 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2,$

отсюда $160\,000 \cdot 11^n \cdot 3^m \cdot 5^m \cdot 7^m = 2^2 \cdot 7^2 \cdot 3^2 \cdot 11^2 \cdot 10^n \cdot 100^m.$

Степени чисел 11 и 3 в левой и правой части равенства одинаковы, значит, $n = 2$, $m = 2$. Проверкой нужно убедиться, что при этих n и m равенство верное.

Общий срок хранения равен $m + n + 1 = 2 + 2 + 1 = 5$.

Ответ: 5.

18. Находим область определения функции.

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ a > 0, \\ a^4 x^{0,5} - x^{0,5 + x\log_x a} + a^x\sqrt{a} - a^{4,5} \geqslant 0. \end{cases}$$

Преобразуем последнее неравенство данной системы.

$a^4 x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} x^{x\log_x a} + a^x \cdot a^{\frac{1}{2}} - a^4 \cdot a^{\frac{1}{2}} \geqslant 0.$

Заметим, что $x^{x\log_x a} = x^{\log_x a^x} = a^x$.

$x^{\frac{1}{2}}(a^4 - a^x) + a^{\frac{1}{2}}(a^x - a^4) \geqslant 0$, $(a^x - a^4)(a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}) \geqslant 0$. На ОДЗ это неравенство равносильно неравенству $(a-1)(x-4)(a-x) \geqslant 0$, $(x-4)(x-a)(a-1) \leqslant 0$.

При $a < 1$ получим $(x-4)(x-a) \geqslant 0$.

Значит, $x \in (0; a] \cup [4; +\infty)$ и целых чисел бесконечно много.

При $a > 1$ получим $(x-4)(x-a) \leqslant 0$, откуда либо $x \in [a; 4]$, либо $x \in [4; a]$.

При $a \leqslant 4$ ровно 3 целых корня будет при $a \in (1; 2]$, так как в промежуток $[a; 4]$ должны войти целые числа от 2 до 4.

При $a \geqslant 4$ ровно 3 целых корня будет при $a \in [6; 7)$, так как в промежуток $[4; a]$ должны войти целые числа от 4 до 6, а 7 войти не должно.

Наконец, при $a = 1$ функция принимает вид $y = \sqrt[8]{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}$. Её область определения $x > 0$ содержит бесконечно много целых чисел.

Ответ: $(1; 2] \cup [6; 7)$.

19. а) Если у садовника нет дополнительных ограничений, то на каждом из 7 мест для посадки может быть саженец любого вида, то есть для каждого места — 6 вариантов. Тогда общее число вариантов равно $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 279\,936$.

б) Если представлены все виды саженцев, то какого-то вида — 2 дерева, а остальных — по 1. Выбрать вид, представленный 2 деревьями, можно 6 способами. Предположим, что соответствующий выбор сделан и у садовника 7 саженцев, 2 из которых — одинаковы. Временно будем считать все саженцы различными. Тогда их можно высадить $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5\,040$ способами. Однако на самом деле каждый способ мы посчитали дважды, так как все способы делятся на пары, отличающиеся только относительным порядком одинаковых саженцев.

9. Зак. № 82

Значит, способов посадить выбранные саженцы $\frac{5\,040}{2} = 2\,520$. Вспоминая, что выбрать саженцы можно 6 способами, получим общее число способов посадки, равное $6 \cdot 2\,520 = 15\,120$.

в) Заметим, что двумя фиксированными видами можно засадить ряд $2^7 - 2 = 126$ способами. (2^7 — количество расстановок, используются саженцы не более 2 видов, 2 способа с саженцами одного вида).

Два вида из 6 можно выбрать $C_6^2 = 15$ способами.

Значит, существует $126 \cdot 15 = 1\,890$ способов посадки саженцев ровно 2 видов саженцев и 6 способов — ровно 1 вида. Значит, 1 896 способов можно применить при посадке саженцев менее 3 видов, а всего 279 936 способов. Таким образом, искомых способов $279\,936 - 1\,896 = 278\,040$.

Ответ: а) 279 936 б) 15 120 в) 278 040

Решение варианта № 14

1. После удержания 13% от заработной платы Ирина Николаевна получила 24 360 рублей. Следовательно, 24 360 рублей составляют 87% зарплаты, или 0,87 зарплаты. Тогда $24\,360 : 0{,}87 = 28\,000$ рублей.

Ответ: 28 000.

2. Норма осадков составляет менее 30 мм в соответствии с данной диаграммой в январе, феврале, марте и декабре, то есть в течение 4 месяцев.

Ответ: 4.

3. Так как в четырёхугольник можно вписать окружность, то $AB + CD = BC + AD$ (см. рис. 62). Значит, периметр равен $(AB + CD) \cdot 2 = (13 + 19) \cdot 2 = 64$.

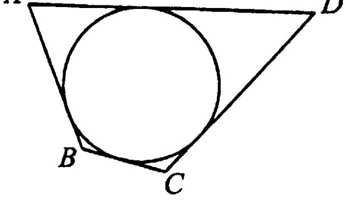


Рис. 62

Ответ: 64.

4. Вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по теме «История Древнего мира» или по теме «История эпохи Возрождения», равна $0{,}06 + 0{,}22 = 0{,}28$.

Ответ: 0,28.

5. $\left(\frac{1}{3}\right)^{18-5x} = 9;\ 3^{5x-18} = 3^2;\ 5x - 18 = 2;\ x = 4.$

Ответ: 4.

6. По условию $\angle ABC = 90^\circ$ и является вписанным в окружность. Следовательно, по теореме о вписанном угле, он измеряется половиной дуги, на которую опирается. Поэтому $\smile AC = 180^\circ$.

Ответ: 180.

7. Функция $f(x)$ убывает на промежутках, на которых производная функции отрицательна. $f'(x) < 0$ на трёх промежутках, длина наибольшего из них равна 3.

Ответ: 3.

8. $V = 9 \cdot 5 \cdot 4 - 3 \cdot 3 \cdot 4 = 9 \cdot 4 \cdot (5 - 1) = 144.$

Ответ: 144.

9. Так как $\sin\gamma = \frac{7\sqrt{2}}{10}$ и $\gamma \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, то $\cos^2\gamma = 1 - \sin^2\gamma$;

$\cos^2\gamma = 1 - \frac{49 \cdot 2}{100} = \frac{2}{100}$, $\cos\gamma = -\frac{\sqrt{2}}{10}$.

Тогда $\operatorname{tg}\gamma = \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = \frac{7\sqrt{2}}{10} : \left(-\frac{\sqrt{2}}{10}\right) = -7.$

Ответ: −7.

10. Так как $A \leqslant 126\,000$, то $\alpha vT \log_2 \frac{p_2}{p_1} \leqslant 126\,000$;

$3{,}5 \cdot 40 \cdot 300 \cdot \log_2 \frac{p_2}{1{,}3} \leqslant 126\,000;\ \log_2 \frac{p_2}{1{,}3} \leqslant 3;\ \log_2 \frac{p_2}{1{,}3} \leqslant \log_2 2^3;\ \frac{p_2}{1{,}3} \leqslant 2^3;$ $p_2 \leqslant 8 \cdot 1{,}3;\ p_2 \leqslant 10{,}4.$

Значит, наибольшее давление, до которого можно сжать воздух в колоколе, равно 10,4 атм.

Ответ: 10,4.

11. По условию первая фирма внесла $400 \cdot 0{,}4 = 160$ (млн руб.); вторая фирма внесла 40 млн руб.; третья фирма — $400 \cdot 0{,}2 = 80$ (млн руб.); четвёртая фирма — $400 - (160 + 40 + 80) = 120$ (млн руб.).

10. Зак. № 82

От прибыли в 250 млн руб. четвёртой фирме причитается $\frac{120}{400} \cdot 250 = 75$ (млн руб.).

Ответ: 75.

12. Функция $y = 63 + 20x - \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}}$ определена при $x \geqslant 0$ (см. рис. 63).

$y'(x) = 20 - 5x^{\frac{1}{2}} = 20 - 5\sqrt{x}$; $20 - 5\sqrt{x} = 0$; $\sqrt{x} = 4$; $x = 16$.

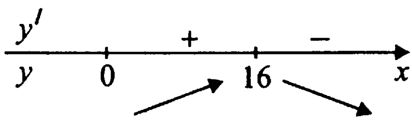


Рис. 63

Так как при переходе через стационарную точку $x = 16$ производная меняет знак с «плюса» на «минус», то $x = 16$ — точка максимума.

Ответ: 16.

13. 1) $\sin x > 0$, тогда $|\sin x| = \sin x$ и уравнение примет вид $2\cos x = -1$, или $\cos x = -\frac{1}{2}$,

$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$. Учитывая условие $\sin x > 0$, получим $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

2) $\sin x < 0$, тогда $|\sin x| = -\sin x$ и уравнение примет вид $2\cos x = -3$, или $\cos x = -\frac{3}{2}$. Уравнение не имеет корней, так как $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$.

б) Отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку $[-2; 10]$.

При $k = -1$, $x = \frac{2}{3}\pi - 2\pi = -\frac{4}{3}\pi < -2$.

При $k = 0$, $x = \frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3} \in [-2; 10]$.

При $k = 1$, $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{3} \in [-2; 10]$.

При $k = 2$, $x = \frac{2\pi}{3} + 4\pi = \frac{14\pi}{3} > 10$.

Получили числа $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{8\pi}{3}$ в указанном промежутке.

Ответ: а) $\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$; б) $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{8\pi}{3}$.

14. а) В плоскости грани ABB_1A_1 проведём прямую, проходящую через точку B и параллельную прямой AB_1.

Пусть K — точка пересечения этой прямой с A_1B_1, Q — точка пересечения этой прямой с AA_1 (см. рис. 64).

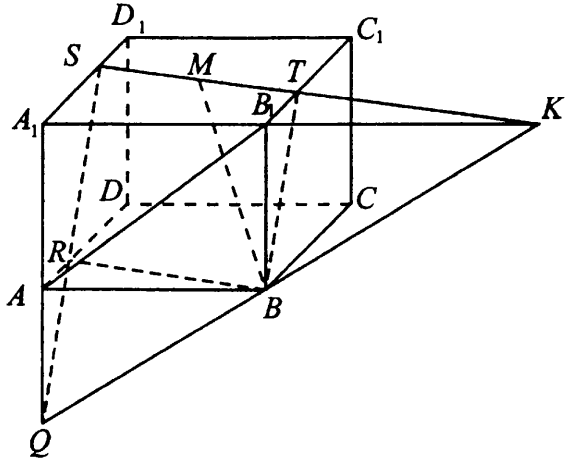


Рис. 64

Прямая KM пересекает ребро B_1C_1 в точке T, ребро A_1D_1 — в точке S. Отрезок SQ пересекает ребро AD в точке R. Плоскость SKQ проходит через прямую BM и параллельна прямой AB_1, так как проходит через QK, параллельную AB_1. Точки S, T, B, R лежат в плоскости SKQ, поэтому четырёхугольник $STBR$ образует искомое сечение.

б) 1) В плоскости грани AA_1B_1B построим отрезок $BK\parallel AB_1$. $AB_1\parallel(BMK)$ (см. рис. 65).

2) В плоскости $A_1B_1C_1$ проведём $B_1N\perp MK$, тогда по теореме, обратной теореме о трёх перпендикулярах, $BN\perp MK$ как наклонная к плоскости $A_1B_1C_1$, проекция которой $B_1N\perp MK$ по построению.

3) Плоскость $BB_1N\perp MK$ (MK перпендикулярна пересекающимся прямым B_1N и BB_1), следовательно, любая прямая плоскости BB_1N перпендикулярна прямой MK.

4) Проведём отрезок $B_1H\perp BN$. Длина этого отрезка — искомое расстояние. Действительно, отрезок B_1H перпендикулярен двум пересе-

кающимся прямым (BN и MK) плоскости BMK, параллельной AB_1 и проходящей через BM.

5) Из $\triangle MB_1K$ найдём высоту B_1N (см. рис. 66):

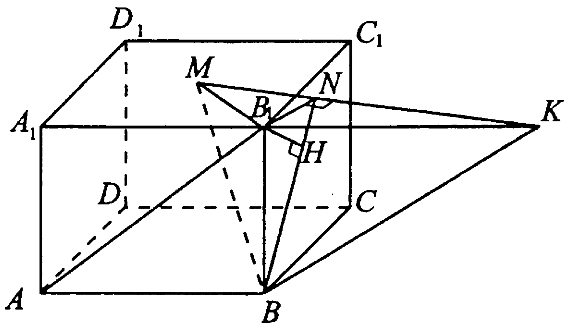


Рис. 65

$MB_1 = \sqrt{2}$, $B_1K = 2$, $\angle MB_1K = 135^\circ$. По теореме косинусов $MK = \sqrt{MB_1^2 + KB_1^2 - 2MB_1 \cdot KB_1 \cdot \cos 135^\circ} =$

$$= \sqrt{2 + 4 - 2\sqrt{2} \cdot 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \sqrt{10}.$$

$$S_{MB_1K} = \frac{1}{2} MB_1 \cdot B_1K \cdot \sin 135^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1,$$

$$S_{MB_1K} = \frac{1}{2} MK \cdot B_1N = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot B_1N.$$

$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot B_1N = 1$, откуда $B_1N = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

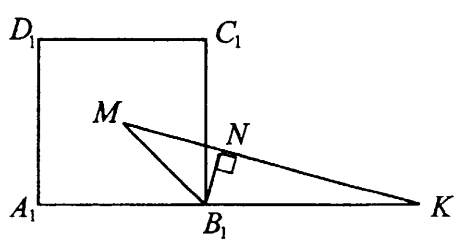


Рис. 66

Из прямоугольного треугольника BB_1N (см. рис. 65) высоту B_1H найдём из условия $BB_1 \cdot B_1N = BN \cdot B_1H$.

По теореме Пифагора в треугольнике BB_1N, $BN = \sqrt{BB_1^2 + B_1N^2}$.

$BN = \sqrt{2^2 + \left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{22}{5}}$, тогда $2 \cdot \frac{\sqrt{10}}{5} = \sqrt{\frac{22}{5}} \cdot B_1H$,

$B_1H = \frac{2\sqrt{11}}{11}$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{11}}{11}$.

15. ОДЗ: $\begin{cases} 1 - x \geqslant 0, \\ x > 0, \\ 2x - 1 \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leqslant 1, \\ x > 0, \\ x \neq \frac{1}{2}. \end{cases}$

$0 < x < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < x \leqslant 1.$

Заметим, что $x = 1$ не является решением неравенства, так как левая часть неравенства обращается в нуль, и неравенство $0 > 0$ неверное. При $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right)$ исходное неравенство равносильно неравенству

$\log_3 x > 1 - \frac{3}{2x - 1}$.

Решим полученное неравенство на каждом из промежутков

$0 < x < \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2} < x < 1.$

1) Если $0 < x < \frac{1}{2}$, то $2x-1 < 0$, $1 - \frac{3}{2x-1} > 1$, а $\log_3 x < \log_3 \frac{1}{2} < 0$.

Значит, ни для какого x из промежутка $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ не выполняется неравенство $\log_3 x > 1 - \frac{3}{2x - 1}$. Поэтому исходное неравенство на промежутке $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ не имеет решений.

2) Если $\frac{1}{2} < x < 1$, то $2x - 1 < 1$ и $1 - \frac{3}{2x - 1} < -2$.

Тогда $\log_3 x > \log_3 \frac{1}{2} > \log_3 \frac{1}{3} = -1$.

Так как для всех значений x из промежутка $\left(\frac{1}{2};1\right)$ выполняется неравенство $\log_3 x > 1 - \frac{3}{2x-1}$, то любое значение x из промежутка $\left(\frac{1}{2};1\right)$ является решением исходного неравенства.

Ответ: $\left(\frac{1}{2};1\right)$.

16. а) Точка O равноудалена от точек B и D, значит, лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BD, то есть O принадлежит прямой AC. По условию $OC < OB$. Докажем, что точки O и C лежат по одну сторону от диагонали BD.

Предположим противное. Обозначим точку пересечения диагоналей квадрата F (см. рис. 67) . Если O и F совпадают, то $OB = OC$, что противоречит условию. Если O и C лежат по разные стороны BD, то $\angle OCB = 45°$, $\angle OBC > 45°$. В $\triangle OBC$ против большего угла лежит бóльшая сторона, $OC > OB$, что не выполняется.

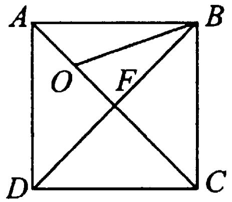


Рис. 67

Предположим, что точка O лежит вне квадрата (см. рис. 68). Пусть F — точка пересечения диагоналей квадрата, a — длина стороны квадрата ($a > 15$, так как площадь квадрата больше 225).

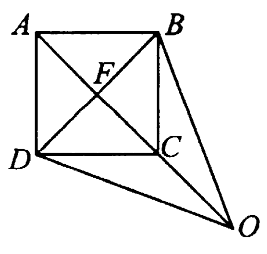


Рис. 68

Тогда $FB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Применим теорему Пифагора в прямоугольном треугольнике BOF (диагонали квадрата взаимно перпендикулярны): $BO^2 = FB^2 + FO^2$, $169 = \frac{a^2}{2} + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} + 5\sqrt{2}\right)^2$, $a^2 + 10a - 119 = 0$, откуда $a_{1,2} = -5 \pm 12$. $a_1 = -17 < 0$, $a_2 = 7 < 15$.

Получили противоречие.

Итак, точка O лежит внутри квадрата.

б) Как показано в пункте а), точки O и C лежат по одну сторону от диагонали BD (см. рис. 69). Проведём $OM \perp DC$. Легко видеть, что ΔOMC прямоугольный и равнобедренный ($\angle OCM = 45°$, значит, и $\angle COM = 45°$), поэтому $OM = MC = 5$.

Из прямоугольного треугольника ODM по теореме Пифагора найдём катет DM: $DM = \sqrt{DO^2 - OM^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$. $DC = DM + MC = 12 + 5 = 17$.

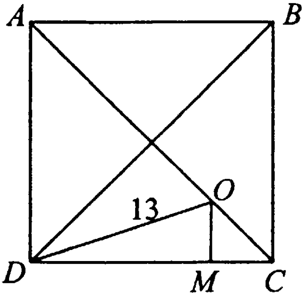


Рис. 69

Ответ: 17.

17. Внесём данные в таблицу.

Отделение банка	**Число клиентов**	**Корпоративные клиенты**		**Бюджетные организации**		**Частные клиенты**	
		%	**Число клиентов**	%	**Число клиентов**	%	**Число клиентов**
I	x	30	$0{,}3x$	70	$0{,}7x$		
II	y			10	$0{,}1y$	90	$0{,}9y$
III	z	15	$0{,}15z$	25	$0,25z$	60	$0,6z$
После объединения	$x+y+z$			?	$0{,}7x+0{,}1y+$ $+0{,}25z$	40	$0{,}9y+0,6z$ или $0{,}4(x+y+z)$

Число частных клиентов до объединения отделений банков и после одно и то же, поэтому можно составить уравнение $0{,}9y+0{,}6z = 0,4(x+y+z)$, откуда $x = \dfrac{5y+2z}{4}$. После объединения отделений банка доля бюджетных организаций стала равна $A = \dfrac{0{,}7x+0{,}1y+0{,}25z}{x+y+z}$.

Тогда $A = \dfrac{0{,}7\cdot\dfrac{5y+2z}{4}+0{,}1y+0{,}25z}{\dfrac{5y+2z}{4}+y+z} = \dfrac{39y+24z}{90y+60z} =$

$$= \frac{13y+8z}{30y+20z} = \frac{13+8\cdot\frac{z}{y}}{30+20\cdot\frac{z}{y}} = \frac{\left(12+8\frac{z}{y}\right)+1}{\left(30+20\frac{z}{y}\right)} = \frac{2}{5}+\frac{1}{30+20\cdot\frac{z}{y}}.$$

Ясно, что $\frac{z}{y} > 0$ (по условию $y > 0$, $z > 0$), при этом $\frac{z}{y}$ принимает любые положительные рациональные значения.

Тогда $30+20\cdot\frac{z}{y} > 30$, $0 < \dfrac{1}{30+20\cdot\frac{z}{y}} < \dfrac{1}{30}$.

$\frac{2}{5} < \frac{2}{5} + \frac{1}{30 + 20 \cdot \frac{z}{y}} < \frac{2}{5} + \frac{1}{30} = \frac{13}{30}$. Значит, процент, который могут составлять бюджетные организации, то есть $\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{30 + 20\frac{z}{y}}\right) \cdot 100\%$ удовлетворяет двойному неравенству

$$\frac{2}{5} \cdot 100\% < A \cdot 100\% < \frac{13}{30} \cdot 100\%$$

$$40\% < A \cdot 100\% < \frac{130}{3}\% = 43\frac{1}{3}\%.$$

Ответ: $\left(40\%; 43\frac{1}{3}\%\right)$.

18. Заметим, что если пара $(x_0; y_0)$ — решение системы, то пары $(-x_0; -y_0)$, $(y_0; x_0)$, $(-y_0; -x_0)$ также являются решениями этой системы. Пары $(x_0; y_0)$ и $(-x_0; -y_0)$ различны, так как в противном случае пара $(0; 0)$ была бы решением системы, а это не так (пара $(0; 0)$ не является решением второго уравнения). Пары $(x_0; y_0)$ и $(-y_0; -x_0)$ тоже различны, так как в противном случае $y_0 + x_0 = 0$, и равенство $(x_0 + y_0)^2 = 14$ не выполняется.

Система имеет два решения, если совпадают пары $(x_0; y_0)$ и $(y_0; x_0)$, то есть $x_0 = y_0$.

Тогда второе уравнение системы примет вид $4x_0^2 = 14$, его корни $x_0' = \sqrt{\frac{7}{2}}$, $x_0'' = -\sqrt{\frac{7}{2}}$. Подставляя пары $\left(\sqrt{\frac{7}{2}}; \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$ и $\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}; -\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$ в первое уравнение системы, в обоих случаях получим уравнение $\frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 2(a+1)$, откуда $a = \frac{5}{2}$. Значит, если a — искомое значение параметра, то a может принимать только значение $\frac{5}{2}$.

При $a = \frac{5}{2}$ исходная система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 7, \\ (x+y)^2 = 14. \end{cases}$$

Умножая первое уравнение на 2 и вычитая результат из второго уравнения системы, получим равносильную систему $\begin{cases} (x-y)^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 7, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x = y, \\ 2x^2 = 7. \end{cases}$

Эта система имеет два решения: $\left(\sqrt{\frac{7}{2}}; \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$ и $\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}; -\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$, значит, действительно, $a = \frac{5}{2}$ — единственное значение параметра, при котором система имеет ровно два решения.

Ответ: $\frac{5}{2}$.

19. а) Наименьшее общее кратное чисел данного набора равно $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Запишем все возможные делители числа 210:

1; 2; 3; 5; 6; 7; 10; 14; 15; 21; 30; 35; 42; 70; 105; 210.

Заметим, что единицы среди чисел данного набора нет, так как по условию для любых двух данных чисел их наибольший общий делитель больше единицы.

Предположим, что 3 принадлежит данному набору чисел, тогда каждое другое число из данных чисел делится на 3: 3, 6, 15, 21, 30, 42, 105, 210 (а их ровно 8, поэтому ни одно убрать нельзя). Произведение этих восьми ($n > 7$) чисел равно $2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^4$ и не делится на $1920 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5$. Значит, 3 не содержится среди данных чисел.

б) Если предположить, что число 2 принадлежит данному набору чисел, то остальные числа набора чётные. Выпишем все чётные числа, на которые делится 210: 2, 6, 10, 14, 30, 42, 70, 210. Произведение $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^4$ этих восьми чисел ($n > 7$) является точным квадратом, что противоречит условию, следовательно, 2 не содержится среди данных чисел.

в) Пусть k — произвольное число данного набора. Оно является делителем числа $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, значит, $k = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$, где показатели a, b, c и d не превосходят единицу. Так как произведение всех чисел данного набора делится на $1920 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5$, то набор содержит не менее семи чётных чисел. Значит, семь чисел 6, 10, 14, 30, 42, 70, 210 точно принадлежат данному набору (см. пункт б). Но по условию $n > 7$. Найдём нечётные числа, принадлежащие данному набору чисел. Пусть k нечётное число из данного набора, тогда числа 6 и $k = 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$ не взаимно просты, значит, k делится на 3. Рассуждая аналогично, получим, что k делится на 5 и на 7, то есть k делится на $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$. Получили $k = 105$. Других нечётных чисел в наборе нет. Так как простые числа 3, 5, 7 входят в k в степени не выше первой.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 6, 10, 14, 30, 42, 70, 105, 210.

Решение варианта № 15

1. 1) Во время распродажи флакон жидкого мыла стал стоить $180 - 180 \cdot 0{,}25 = 180 \cdot 0{,}75 = 135$ рублей.

2) $1000 : 135 = 7$, то есть на 1000 рублей можно купить 7 флаконов жидкого мыла.

Ответ: 7.

2. На графике видно, что автомобиль двигался $2+1+2 = 5$ ч со скоростью не более 70 км/ч.

Ответ: 5.

3. KM — средняя линия трапеции, $KM = \dfrac{BC + AD}{2} = 17$ (см. рис. 70). Отсюда $BC + AD = 17 \cdot 2 = 34$. Из условия следует, что трапеция равнобедренная, то есть $AB = CD = \dfrac{84 - 34}{2} = 25$.

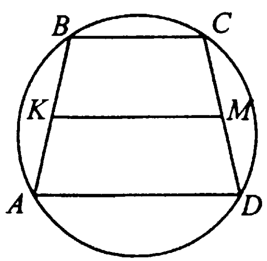


Рис. 70

Ответ: 25.

4. Любой из оставшихся 25 участников соревнований может оказаться соперником Артёма Веселова в первом туре чемпионата, причём только 12 из них будут из России. Поэтому искомая вероятность равна $\dfrac{12}{25} = 0{,}48$.

Ответ: 0,48.

5. $\sqrt{\dfrac{1}{3x - 51}} = \dfrac{1}{6}$; $\dfrac{1}{3x - 51} = \dfrac{1}{36}$; $3x - 51 = 36$; $3x = 87$; $x = 29$.
Проверка показывает, что $x = 29$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: 29.

6. $\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AB = \frac{1}{2} \cdot 84^\circ = 42^\circ.$

Ответ: 42.

7. Так как прямая $y = -8x + 1$ параллельна касательной к графику заданной функции, то угловой коэффициент касательной $k = -8$ и $y = -8x + b$ — уравнение касательной. Найдём координаты точки касания:

$2x^2 - 2x + 9 = -8x + b;$

$2x^2 + 6x + 9 - b = 0.$

Так как мы ищем координаты точки касания, то последнее уравнение должно иметь единственный корень и его дискриминант $D = 8b - 36 = 0$. Отсюда $b = 4{,}5$. Значит, $y = -8x + 4{,}5$ — уравнение касательной к графику функции $y = 2x^2 - 2x + 9$.

Найдём абсциссу точки касания:

$2x^2 - 2x + 9 = -8x + 4{,}5;$

$2x^2 + 6x + 4{,}5 = 0;$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4{,}5}}{2 \cdot 2} = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{4} = -1{,}5.$$

Ответ: $-1{,}5$.

8. $V = 8 \cdot 2 \cdot 5 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 80 - 20 = 60.$

Ответ: 60.

9. $$\frac{11\cos(\pi + \beta) + 4\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \beta\right)}{\cos(\beta - 5\pi)} = \frac{11 \cdot (-\cos\beta) + 4 \cdot (-\cos\beta)}{-\cos\beta} =$$

$$= \frac{-15\cos\beta}{-\cos\beta} = 15.$$

Ответ: 15.

10. $\varphi = \omega t + \frac{\beta t^2}{2}$, где t — время в минутах, $\omega = 20^\circ/\text{мин}$, $\beta = 4^\circ/\text{мин}^2$, $\varphi = 2400^\circ$.

$20t + \frac{4t^2}{2} = 2400;$

$2t^2 + 20t - 2400 = 0;$

$t^2 + 10t - 1200 = 0;$

$t_1 = 30, t_2 = -40.$

Так как $t > 0$, то время после начала работы лебёдки, не позже которого рабочий должен проверить её работу, равно 30 минут.

Ответ: 30.

11. Пусть скорость течения реки равна x км/ч. Тогда баржа двигалась по течению реки со скоростью $(x+8)$ км/ч, а против течения реки со скоростью $(8-x)$ км/ч.

По течению реки баржа плыла из пункта A до места стоянки в пункте B $\frac{21}{8+x}$ часов. Назад плыла против течения $\frac{21}{8-x}$ часов. Зная, что в пункте B баржа стояла 1 час и что всё путешествие длилось 8 часов, составим уравнение:

$\frac{21}{8+x}+\frac{21}{8-x}+1=8;$

$\frac{168-21x+168+21x-7(64-x^2)}{(8+x)(8-x)}=0;$

$7x^2-448+336=0;$

$7x^2=112;$

$x^2=16.$

$x_1=4,$

$x_2=-4$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 4.

12. 1) $y(1)=4-24+38=18;$

$y(16)=4\cdot16\cdot4-24\cdot16+38=256-384+38=-90.$

2) $y'(x)=(4x^{1,5}-24x+38)'=6x^{0,5}-24.$

$y'(x)=0;\ 6\sqrt{x}-24=0;\ \sqrt{x}=4;\ x=16;\ y(16)=-90.$

Наименьшее значение функции на отрезке $[1;16]$ равно -90.

Ответ: -90.

13. а) Решим уравнение $\frac{|\cos x|}{\cos x}-2=2\sin x.$

1) $\cos x>0$, тогда $|\cos x|=\cos x$ и уравнение примет вид $1-2=2\sin x$, или $\sin x=-\frac{1}{2}$. Учитывая, что $\cos x>0$, получим

$x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z.$

2) $\cos x<0$, тогда $|\cos x|=-\cos x$ и уравнение примет вид $-1-2=2\sin x$, или $\sin x=-\frac{3}{2}$.

Уравнение не имеет корней, так как $-1\leqslant\sin x\leqslant1$.

Итак, $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z.$

б) Отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку $[-1; 7]$.

При $k = 0$, $x = -\frac{\pi}{6}$: $-1 < -\frac{\pi}{6} < 7$, так как $-\frac{\pi}{6} > -\frac{4}{6}$, $-\frac{\pi}{6} < 0$, следовательно, $-\frac{\pi}{6} \in [-1; 7]$.

При $k = 1$, $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$: $0 < \frac{11\pi}{6} < \frac{11 \cdot 3{,}2}{6} < 6$, следовательно, $\frac{11\pi}{6} \in [-1; 7]$.

При $k = 2$, $x = -\frac{\pi}{6} + 4\pi = \frac{23\pi}{6}$: $\frac{23\pi}{6} > 10$, следовательно, корни уравнения $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$, при $k \geqslant 2$ не принадлежат отрезку $[-1; 7]$.

При $k = -1$, $x = -\frac{\pi}{6} - 2\pi < -1$, следовательно, корни уравнения $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$, при $k \leqslant -1$ не принадлежат отрезку $[-1; 7]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$; б) $-\frac{\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$.

14. а) По условию $SABC$ — правильная пирамида, это означает, что основание является правильным треугольником и вершина проектируется в центр основания. SO — высота пирамиды, где O — центр треугольника ABC. Боковые рёбра правильной пирамиды равны, поэтому боковая грань ASB является равнобедренным треугольником. В этом треугольнике L — точка пересечения средней линии MN и высоты SF (см. рис. 71).

В плоскости SCF через точку L проведём отрезок LT параллельно SO, следовательно, LT — перпендикуляр к плоскости основания. Через точку T в плоскости основания проведём отрезок PK, параллельный AB (если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает её, то линия пересечения параллельна этой прямой). $MNPK$ — искомое сечение.

б) Для того чтобы найти расстояние от вершины C до плоскости сечения, нужно из точки C построить перпендикуляр к плоскости MNK и найти его длину. CT перпендикуляр к плоскости MNK, так как CT перпендикулярен двум пересекающимся прямым плоскости сечения: $CT \perp PK$ и $CT \perp LT$.

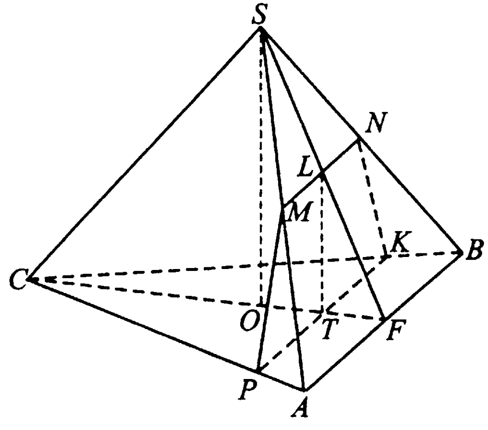


Рис. 71

В правильном треугольнике со стороной a высота равна $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Высота SF треугольника ASB является медианой, то есть $AF = FB$, значит, CF — медиана, следовательно, и высота правильного треугольника ABC.

$CF = \frac{30\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}.$

Точка O — центр основания, значит, является точкой пересечения медиан треугольника ABC. $OF = \frac{1}{3}CF$, $OF = 5\sqrt{3}$.

В $\triangle SOF$ по теореме Фалеса

$FT = OT = \frac{1}{2}OF = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$

$CT = CF - FT = 15\sqrt{3} - \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{2}.$

Ответ: $\frac{25\sqrt{3}}{2}$.

15. Найдём ОДЗ, решив систему неравенств

$$\begin{cases} x \neq -\frac{1}{2}, \\ 3^x - 4 \cdot 3^{-x} - 6 > 0. \end{cases}$$

Решим неравенство $3^x - 4 \cdot 3^{-x} - 6 > 0$.

$3^x - 4 \cdot 3^{-x} - 6 > 0$; $\frac{3^{2x} - 6 \cdot 3^x - 4}{3^x} > 0$; $3^{2x} - 6 \cdot 3^x - 4 > 0$.

С помощью замены $3^x = t$, $t > 0$ неравенство приведем к квадратному $t^2 - 6t - 4 > 0$, решая которое получим $t > 3 + \sqrt{13}$ или $t < 3 - \sqrt{13}$. Последнее неравенство не удовлетворяет условию $t > 0$, значит, $3^x > 3 + \sqrt{13}$, откуда $x > \log_3(3 + \sqrt{13})$.

На ОДЗ $2x + 1 > 0$, поэтому

$$\frac{\log_3(3^x - 4 \cdot 3^{-x} - 6) + 3x}{2x+1} \geqslant 1;$$

$$\log_3\left(\frac{3^{2x} - 6 \cdot 3^x - 4}{3^x}\right) + 3x \geqslant 2x + 1;$$

$$\log_3(3^{2x} - 6 \cdot 3^x - 4) - \log_3 3^x + x \geqslant 1;$$

$$\log_3(3^{2x} - 6 \cdot 3^x - 4) - x + x \geqslant 1;$$

$$\log_3(3^{2x} - 6 \cdot 3^x - 4) \geqslant 1;$$

$$3^{2x} - 6 \cdot 3^x - 4 \geqslant 3;\ 3^{2x} - 6 \cdot 3^x - 7 \geqslant 0.$$

Пусть $3^x = t, t > 0$. Тогда неравенство примет вид $t^2 - 6 \cdot t - 7 \geqslant 0$.

Решая это неравенство, получим $t \geqslant 7$, $t \leqslant -1$ (нарушается условие $t > 0$).

$3^x > 7$, откуда $x \geqslant \log_3 7$.

Так как $\log_3(3 + \sqrt{13}) < \log_3(3 + 4)$, то $x \geqslant \log_3 7$ — решение неравенства.

Ответ: $[\log_3 7; +\infty)$.

16. а) Медиана треугольника делит его на два равновеликих треугольника (см. рис. 72): $\frac{S_{A_1BA}}{S_{A_1AC}} = \frac{A_1B}{A_1C} = \frac{1}{1}$.

$$S_{A_1BA} = S_{A_1AC} = \frac{1}{2}S_{ABC}, S_{ABC} = 2S_{A_1BA}.$$

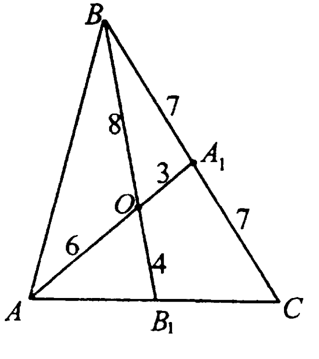


Рис. 72

Медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины: $\frac{S_{AOB}}{S_{A_1OB}} = \frac{AO}{A_1O} = \frac{2}{1}$; $\frac{S_{AOB}}{S_{OAB_1}} = \frac{BO}{B_1O} = \frac{2}{1}$, откуда

$S_{AOB} = 2S_{A_1OB} = 2S_{OAB_1}$.

$S_{OA_1CB_1} = S_{A_1AC} - S_{OAB_1} = S_{A_1AB} - S_{A_1OB} = 3S_{A_1OB} - S_{A_1OB} = 2S_{A_1OB}$, $S_{A_1OB} = \frac{1}{2}S_{OA_1CB_1}$.

б) Из пункта а) следует, что $S_{ABC} = 6S_{A_1OB}$.

В треугольнике A_1OB известны стороны, поэтому для вычисления его площади воспользуемся формулой Герона $S = \sqrt{p \cdot (p-a)(p-b)(p-c)}$, где p — полупериметр, a, b, c — стороны треугольника $BO = 8$, $A_1O = 3$, $A_1B = 7$.

$S_{A_1OB} = \sqrt{9 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 2} = 6\sqrt{3}$. $S_{ABC} = 6 \cdot 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$.

Ответ: $36\sqrt{3}$.

17. Пусть N — сумма кредита. Внесём данные в таблицу.

Месяц	**Сумма**	**Начислено**	**Отдал**	**Должен**
1	N	$N + \frac{r}{100}N$	$N + \frac{r}{100}N - \frac{23}{24}N$	$\frac{23}{24}N$
2	$\frac{23}{24}N$	$\frac{23}{24}N + \frac{r}{100} \cdot \frac{23}{24}N$	$\frac{23}{24}N + \frac{r}{100} \cdot \frac{23}{24}N - \frac{22}{24}N$	$\frac{22}{24}N$
3	$\frac{22}{24}N$	$\frac{22}{24}N + \frac{r}{100} \cdot \frac{22}{24}N$	$\frac{22}{24}N + \frac{r}{100} \cdot \frac{22}{24}N - \frac{21}{24}N$	$\frac{21}{24}N$
...	...	...	...	...
24	$\frac{1}{24}N$	$\frac{1}{24}N + \frac{r}{100} \cdot \frac{1}{24}N$	$\frac{1}{24}N + \frac{r}{100} \cdot \frac{1}{24}N$	0

Так как общая сумма после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит, то

$$N + \frac{r}{100}(N + \frac{23}{24}N + \frac{22}{24}N + \ldots + \frac{1}{24}N) = 1{,}3N,$$

$$\frac{r}{100 \cdot 24}(24 + 23 + 22 + \ldots + 1) = 0{,}3,$$

$$\frac{r}{24} \cdot \frac{1+24}{2} \cdot 24 = 30,$$

$25r = 60$, $r = 2{,}4$.

Ответ: 2,4.

18. ОДЗ: $y > 0$. Для всех значений y из ОДЗ $\ln\frac{|y|}{y} = 0$, поэтому система примет вид:

$$\begin{cases} x = y, \\ x + 2(x+a)^2 = x + 2a + 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y, \\ x^2 + 2ax + a^2 = a + 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y, \\ x^2 + 2ax + a^2 - a - 2 = 0. \end{cases}$$

Система имеет единственное решение, если второе уравнение системы имеет единственное положительное решение. Значит, либо дискриминант уравнения равен нулю, а корень уравнения положительный, либо дискриминант положительный, а корни разных знаков.

$\frac{D}{4} = a^2 - a^2 + a + 2 = a + 2$. Тогда $x_{1,2} = -a \pm \sqrt{\frac{D}{4}}$.

1) $a + 2 = 0$, $x = -a$, то есть $a = -2$, $x = 2$.

В этом случае пара $(2; 2)$ единственное решение системы.

2) $a + 2 > 0$, то есть $a > -2$, $x_{1,2} = -a \pm \sqrt{a+2}$.

Корни уравнения x_1 и x_2 будут иметь разные знаки тогда и только тогда, когда $x_1 x_2 < 0$. Но, по теореме Виета, $x_1 x_2 = a^2 - a - 2$.

Итак, $a^2 - a - 2 < 0$; $(a+1)(a-2) < 0$; $-1 < a < 2$.

В этом случае второе уравнение системы имеет единственный положительный корень $x_1 = -a + \sqrt{a+2}$, а вся система имеет единственное решение $(x_1; x_2)$.

Итак, при $a = -2$, $-1 < a < 2$ система имеет единственное решение.

Ответ: -2; $(-1; 2)$.

19. а) Предположим, что данный набор не содержит ни одного чётного числа. Тогда их наименьшее общее кратное будет нечётным числом. Это противоречит тому, что по условию оно равно 510. Значит, наше предположение не верно. Отсюда данному набору чисел принадлежит чётное число.

б) Предположим, что 5 принадлежит данному набору чисел, тогда каждое другое число из данного набора чисел, а значит, и их сумма делится на 5, так как наибольший общий делитель для любых двух чисел больше единицы. Следовательно, сумма чисел набора делится на 5, но по условию сумма равна 864 и не делится на 5. Значит, число 5 не принадлежит данному набору чисел.

в) Наименьшее общее кратное чисел данного набора равно $510 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$.

Запишем все возможные делители числа 510:

1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 17; 30; 34; 51; 85; 102; 170; 255; 510.

Заметим, что единицы среди чисел данного набора нет, так как по условию для любых двух данных чисел их наибольший общий делитель больше единицы.

Найдём сумму всех чётных делителей:
$2+6+10+30+34+102+170+510 = 864$. По условию сумма чисел набора равна 864. Если предположить, что все числа набора чётные, число 30 ему принадлежит, в противном случае сумма чисел набора будет меньше 864.

Если не все числа набора чётные, тогда составим всевозможные наборы чисел при условии, что $n > 7$:

1) 6; 10; 15; 30; 102; 170; 255; 510.

2) 17; 34; 51; 85; 102; 170; 255; 510.

Других наборов нет. Так как сумма чисел и первого, и второго набора отлична от 864, то ни один из них не может быть данным набором чисел.

Итак, число 30 принадлежит данному набору чисел.

Ответ: а) да, б) нет, в) да.

Решение варианта № 16

1. 1) Цена ручки после повышения: $15 + 15 \cdot 0{,}2 = 15 + 3 = 18$ (руб.).

2) $800 : 18 \approx 44{,}4$. Значит, наибольшее число ручек, которое можно купить на 800 рублей, равно 44.

Ответ: 44.

2. Из графика видно, что со скоростью не менее 70 км/ч автомобиль двигался со 2-го по 4-й и с 5-го по 9-й часы своего движения. Всего $2 + 4 = 6$ (часов).

Ответ: 6.

3. 1) Так как трапеция вписана в окружность, то она равнобедренная, то есть $AB = CD$ (см. рис. 73). Значит, $AB + CD = 2AB = 2 \cdot 8 = 16$. Тогда $BC + AD = P - (AB + CD) = 72 - 16 = 56$, где P — периметр трапеции.

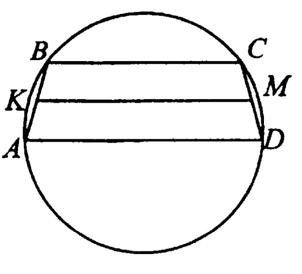


Рис. 73

2) Средняя линия трапеции: $KM = (BC + AD) \cdot \frac{1}{2} = 56 \cdot \frac{1}{2} = 28.$

Ответ: 28.

4. Случайное событие заключается в выборе соперника для Игоря Добродушева в первом туре соревнований. При этом число всех элементарных исходов равно числу оставшихся спортсменов, то есть $46 - 1 = 45$, а число благоприятных исходов равно числу остальных спортсменов из России, то есть $19 - 1 = 18$. Тогда вероятность того, что Игорь Добродушев в первом туре будет играть с каким-либо спортсменом из России, равна $\frac{18}{45} = 0{,}4$.

Ответ: 0,4.

5. $\sqrt{\frac{1}{19+3x}} = 0{,}25$; $\sqrt{\frac{1}{19+3x}} = \frac{1}{4}$; $\frac{1}{19+3x} = \frac{1}{16}$; $19 + 3x = 16$; $3x = -3$; $x = -1$. Проверка показывает, что $x = -1$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: -1.

6. По условию $\angle ABC = 41°$, а так как угол между касательной и хордой, проведённой из точки касания, равен половине угловой величины дуги, высекаемой на окружности этой хордой, то градусная мера дуги ADB равна 82° (см. рис. 74).

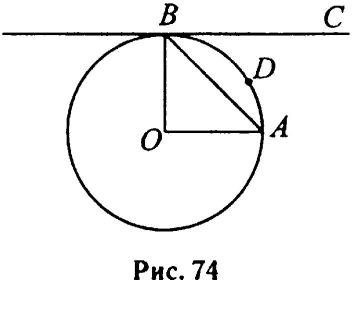


Рис. 74

Ответ: 82.

7. Так как прямая $y = 4x + 3$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 5x + \frac{5}{4}$, то угловой коэффициент касательной равен 4.

$y'(x) = 2x + 5$, $2x + 5 = 4$, $2x = -1$, $x = -0{,}5$.

$x = -0{,}5$ — абсцисса точки касания.

Ответ: $-0{,}5$.

8. $V = 6 \cdot 5 \cdot 3 - (6 - 2) \cdot 3 \cdot 3 = 90 - 36 = 54.$

Ответ: 54.

9. $\dfrac{2\sin(\alpha-9\pi)+19\cos\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(\alpha+13\pi)}=\dfrac{-2\sin\alpha+19\sin\alpha}{-\sin\alpha}=-17.$

Ответ: -17.

10. $T(t)=T_0+bt+at^2$,

$1492+153t-17t^2\leqslant 1730$,

$17t^2-153t-1492+1730\geqslant 0$,

$17t^2-153t+238\geqslant 0$,

$t^2-9t+14\geqslant 0$,

$D=81-56=25=5^2$,

$t_1+t_2=9, t_1=2$,

$t_1\cdot t_2=14; t_2=7$.

$(t-2)(t-7)\geqslant 0$ (см. рис. 75).

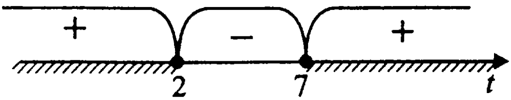


Рис. 75

$t\leqslant 2, t\geqslant 7$.

2 минуты — наибольшее время после начала работы прибора, через которое нагреватель нужно отключить.

Ответ: 2.

11. Пусть скорость течения реки равна x км/ч, скорость баржи при движении по течению реки равна $(11+x)$ км/ч, а против течения — $(11-x)$ км/ч. По течению реки баржа двигалась $\dfrac{60}{11+x}$ часов, против течения — $\dfrac{60}{11-x}$ часов, в пункте B стояла 3 часа. На всё путешествие было затрачено $20-6=14$ (часов). Составим уравнение.

$\dfrac{60}{11+x}+\dfrac{60}{11-x}+3=14$.

$\dfrac{660-60x+660+60x-11\cdot(121-x^2)}{(11+x)(11-x)}=0$,

$11x^2+1320-1331=0$,

$11x^2-11=0$,

$x^2-1=0$,

$x=1$ или $x=-1$.

Так как по условию $x > 0$, то скорость течения реки равна 1 км/ч.

Ответ: 1.

12. $y = -\frac{4}{3}x\sqrt{x} + 12x + 6,\ x \in [1; 81]$.

$y(1) = -\frac{4}{3} + 12 + 6 = 16\frac{2}{3}$.

$y(81) = -\frac{4}{3} \cdot 81 \cdot 9 + 12 \cdot 81 + 6 = -12 \cdot 81 + 12 \cdot 81 + 6 = 6$.

$y'(x) = -\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{x} + 12,\ y'(x) = -2\sqrt{x} + 12$.

$y'(x) = 0$, если $-2\sqrt{x} + 12 = 0$, $\sqrt{x} = 6$, $x = 36$.

$y(36) = -48 \cdot 6 + 12 \cdot 36 + 6 = 36(-8 + 12) + 6 = 36 \cdot 4 + 6 = 150$.

Сравнивая значения функции в концах отрезка и в стационарной точке, делаем вывод: 150 — наибольшее значение функции на отрезке $[1; 81]$.

Ответ: 150.

13. а) Решим уравнение $\frac{|\cos x|}{\cos x} + 2 = 2\sin x$.

1) $\cos x > 0$, тогда $|\cos x| = \cos x$ и уравнение примет вид $1 + 2 = 2\sin x$, или $\sin x = \frac{3}{2}$. Уравнение не имеет корней, так как $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.

2) $\cos x < 0$, тогда $|\cos x| = -\cos x$ и уравнение примет вид $-1 + 2 = 2\sin x$, или $\sin x = \frac{1}{2}$. Учитывая, что $\cos x < 0$, получим $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Итак, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$.

б) Отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку [-1; 9].

При $k = 0$, $x = \frac{5\pi}{6}$: $0 < \frac{5\pi}{6} < 4$, следовательно, $\frac{5\pi}{6} \in [-1; 9]$.

При $k = 1$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{17\pi}{6}$: $0 < \frac{17\pi}{6} < \frac{17 \cdot 3{,}2}{6} < 9$, следовательно, $\frac{17\pi}{6} \in [-1; 9]$.

При $k = 2$, $x = \frac{5\pi}{6} + 4\pi = \frac{29\pi}{6}$: $\frac{29\pi}{6} > 10$, следовательно, корни уравнения $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$ при $k \geqslant 2$ не принадлежат отрезку $[-1; 9]$.

При $k = -1$, $x = \frac{5\pi}{6} - 2\pi < -1$, следовательно, корни уравнения $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$ при $k \leqslant -1$ не принадлежат отрезку $[-1; 9]$.

Ответ: а) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$; б) $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{17\pi}{6}$.

14. а) В правильной четырёхугольной пирамиде основание — квадрат, вершина проектируется в центр квадрата. Отрезок SO — высота пирамиды (см. рис. 76). Боковые рёбра пирамиды равны, значит, боковая грань ASB — равнобедренный треугольник, а точка M делит апофему SF в отношении $2:1$, то есть $SM : MF = 2 : 1$. В прямоугольном треугольнике SFO ($\angle SOF = 90^0$) через точку M проведём отрезок $MN \parallel SO$ (см. рис. 76). $MN \perp ABC$. Искомое сечение проходит через MN и параллельно AB, следовательно, пересекает грань ASB и основание по отрезкам, параллельным AB. Через точки M и N в плоскостях ASB и $ABCD$ соответственно проведём отрезки $LK \parallel AB$ и $PT \parallel AB$. $LKTP$ — искомое сечение.

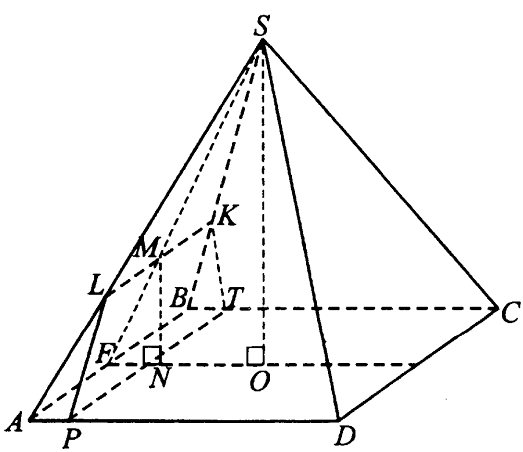


Рис. 76

б) Ребро AB параллельно сечению $LKTP$, поэтому достаточно из произвольной точки этого ребра опустить перпендикуляр на плоскость

LKT. По построению $MN \perp ABC$, откуда следует, что $MN \perp FN$. Так как $FN \parallel AD$ (F — середина ребра AB, O — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$), то $FN \perp PT$, а значит, $FN \perp LKT$.

$\triangle MFN \sim \triangle SFO$: $\frac{MF}{SF} = \frac{FN}{FO} = \frac{1}{3}$.

$FO = \frac{1}{2}AD = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, $FN = \frac{1}{3} \cdot FO = \frac{5\sqrt{2}}{6}$.

Ответ: $\frac{5\sqrt{2}}{6}$.

15. Найдём ОДЗ, решив систему неравенств $\begin{cases} x \neq -1, \\ 2^x - 6 \cdot 2^{-x} - 7 > 0. \end{cases}$

Решим неравенство $2^x - 6 \cdot 2^{-x} - 7 > 0$.

$2^x - 6 \cdot 2^{-x} - 7 > 0$; $\frac{2^{2x} - 7 \cdot 2^x - 6}{2^x} > 0$; $2^{2x} - 7 \cdot 2^x - 6 > 0$.

С помощью замены $2^x = t$, $t > 0$ неравенство приведём к квадратному $t^2 - 7t - 6 > 0$, решая которое получим $t > \frac{7+\sqrt{73}}{2}$ или $t < \frac{7-\sqrt{73}}{2}$. Последнее неравенство не удовлетворяет условию $t > 0$, значит, $2^x > \frac{7+\sqrt{73}}{2}$, откуда $x > \log_2 \frac{7+\sqrt{73}}{2}$.

На ОДЗ $x + 1 > 0$, поэтому

$\frac{\log_2(2^x - 6 \cdot 2^{-x} - 7) + 2x}{x+1} \geqslant 1$;

$\log_2 \frac{2^{2x} - 7 \cdot 2^x - 6}{2^x} + 2x \geqslant x + 1$;

$\log_2(2^{2x} - 7 \cdot 2^x - 6) - \log_2 2^x + x \geqslant 1$;

$\log_2(2^{2x} - 7 \cdot 2^x - 6) - x + x \geqslant 1$;

$\log_2(2^{2x} - 7 \cdot 2^x - 6) \geqslant 1$;

$2^{2x} - 7 \cdot 2^x - 6 \geqslant 2$; $2^{2x} - 7 \cdot 2^x - 8 \geqslant 0$.

Пусть $2^x = t$, $t > 0$. Тогда неравенство примет вид $t^2 - 7t - 8 \geqslant 0$. Решая это неравенство, получим $t \geqslant 8$, $t \leqslant -1$ (нарушается условие $t > 0$). $2^x \geqslant 8$, откуда $x \geqslant 3$. Так как $\log_2 \frac{7+\sqrt{73}}{2} < \log_2 \frac{7+9}{2}$ ($\log_2 \frac{7+9}{2} = \log_2 8 = 3$), то $x \geqslant 3$ — решение неравенства.

Ответ: $[3; +\infty)$.

16. а) Из рисунка 77 видно:

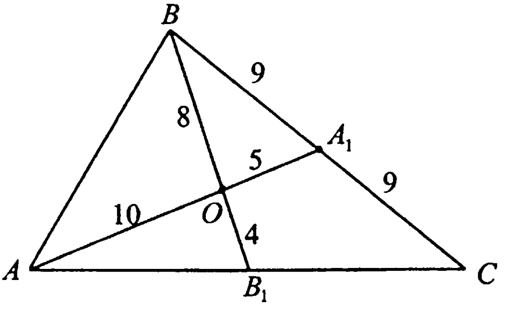


Рис. 77

$S_{AOB} = S_{A_1BA} - S_{A_1OB}$.
$S_{OA_1CB_1} = S_{A_1AC} - S_{OAB_1}$

Так как медиана треугольника делит его на два равновеликих треугольника, то $S_{A_1BA} = S_{A_1AC}$. Покажем, что $S_{A_1OB} = S_{OAB_1}$.

Медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины: $\dfrac{S_{AOB}}{S_{A_1OB}} = \dfrac{AO}{A_1O} = \dfrac{2}{1}$; $\dfrac{S_{AOB}}{S_{OAB_1}} = \dfrac{BO}{B_1O} = \dfrac{2}{1}$, откуда $S_{AOB} = 2S_{A_1OB} = 2S_{OAB_1}$. Итак, $S_{A_1OB} = S_{OAB_1}$.

Следовательно, $S_{AOB} = S_{OA_1CB_1}$.

б) Из пункта а) следует, что $S_{OA_1CB_1} = S_{AOB}$, в свою очередь, $S_{AOB} = 2S_{A_1OB}$. В треугольнике A_1OB известны стороны, поэтому для вычисления его площади воспользуемся формулой Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p — полупериметр, a, b, c — стороны треугольника $BO = 8$, $A_1O = 5$, $A_1B = 9$.

$S_{A_1OB} = \sqrt{11 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2} = 6\sqrt{11}$.
$S_{AOB} = 2 \cdot 6\sqrt{11} = 12\sqrt{11}$.
$S_{OA_1CB_1} = 12\sqrt{11}$.
Ответ: $12\sqrt{11}$.

17. Пусть N — сумма кредита. Внесём данные в таблицу.

Месяц	Сумма	Начислено	Отдал	Должен
1	N	$N+\frac{r}{100}N$	$N+\frac{r}{100}N-\frac{17}{18}N$	$\frac{17}{18}N$
2	$\frac{17}{18}N$	$\frac{17}{18}N+\frac{r}{100}\cdot\frac{17}{18}N$	$\frac{17}{18}N+\frac{r}{100}\cdot\frac{17}{18}N-\frac{16}{18}N$	$\frac{16}{18}N$
3	$\frac{16}{18}N$	$\frac{16}{18}N+\frac{r}{100}\cdot\frac{16}{18}N$	$\frac{16}{18}N+\frac{r}{100}\cdot\frac{16}{18}N-\frac{15}{18}N$	$\frac{15}{18}N$
...	...	...	...	...
18	$\frac{1}{18}N$	$\frac{1}{18}N+\frac{r}{100}\cdot\frac{1}{18}N$	$\frac{1}{18}N+\frac{r}{100}\cdot\frac{1}{18}N$	0

Так как общая сумма после полного погашения кредита на 19% больше суммы, взятой в кредит, то

$$N+\frac{r}{100}\left(N+\frac{17}{18}N+\frac{16}{18}N+\ldots+\frac{1}{18}N\right)=1{,}19N;$$

$$\frac{r}{100\cdot 18}(18+17+16+\ldots+1)=0{,}19;$$

$$\frac{r}{18}\cdot\frac{1+18}{2}\cdot 18=19;$$

$$r=2.$$

Ответ: 2.

18. ОДЗ: $x>1$. Для всех значений x из ОДЗ $\ln\frac{|x-1|}{x-1}=0$, поэтому система примет вид

$$\begin{cases} x=y+1, \\ x+2(y-a)^2=y+2a+13; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=y+1, \\ y^2-2ay+a^2=a+6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=y+1, \\ y^2-2ay+a^2-a-6=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=y+1, \\ (y-a)^2=a+6. \end{cases}$$

Система имеет единственное решение, если второе уравнение системы имеет единственное положительное решение. Значит, либо $a+6=0$, а корень уравнения положительный, либо $a+6>0$, а корни разных знаков.

1) $a + 6 = 0$, $y = a$, то есть $a = -6$, $y = -6$. Тогда $x = y + 1 = 5$ не удовлетворяет ОДЗ исходной системы. В этом случае система решений не имеет.

2) $a + 6 > 0$, то есть $a > -6$.

Уравнение $(y-a)^2 = a+6$ перепишем в виде $y^2 - 2ay + a^2 - a - 6 = 0$. Оно имеет корни различных знаков при $a > -6$ тогда и только тогда, когда свободный член квадратного уравнения отрицателен (так как он, по теореме Виета, равен произведению корней). Итак, $a^2 - a - 6 = 0$; $(a + 2)(a - 3) < 0$; $-2 < a < 3$. Обозначим через y_0 единственное положительное решение этого уравнения. Тогда $(y_0 + 1; y_0)$ — единственное решение исходной системы.

Ответ: $(-2; 3)$.

19. а) Наименьшее общее кратное чисел данного набора равно $570 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 19$.

Запишем все возможные делители числа 570:

1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 19; 30; 38; 57; 95; 114; 190; 285; 570.

Заметим, что единицы среди чисел данного набора нет, так как по условию для любых двух данных чисел их наибольший общий делитель больше единицы.

Предположим, что 2 принадлежит данному набору чисел, тогда каждое другое число из этого набора чисел делится на 2. Найдём сумму всех чётных делителей: $2+6+10+30+38+114+190+570 = 960$. Эта сумма меньше 1220. Значит, число 2 не принадлежит данному набору чисел.

б) Покажем, что простое число 19 (и 3) не принадлежат данному набору чисел. Действительно, если бы 19 (и 3) принадлежали данному набору чисел, то сумма чисел набора делилась бы на 19 (на 3), но 1 220 не делится на 19 (на 3), следовательно, 19 (и 3) не принадлежат данному набору чисел.

Предположим, что число 38 принадлежит данному набору. Заметим, что тогда числа 3, 5 и 15 не могут принадлежать этому набору, так как они взаимно просты с числом 38.

Остаются числа 6, 10; 30; 38; 57; 95; 114; 190; 285; 570, сумма которых равна 1 395. Из них нужно составить набор более чем из семи чисел, сумма которых равна 1 220. Значит, нужно убрать числа, которые в сумме дают 175, но это невозможно.

Итак, число 38 не принадлежит данному набору.

в) В пп. а) и б) показано, что числа 1; 2; 3; 19; 38 не могут принадлежать данному набору чисел.

Из предположения о том, что 5 принадлежит данному набору чисел, следует, что каждое число набора кратно 5: 5; 10; 15; 30; 95; 190; 285; 570. Сумма всех этих чисел равна 1 200 и это меньше 1 220. Значит, 5 не может принадлежать набору.

Остаются числа 6, 10; 15; 30; 57; 95; 114; 190; 285; 570, сумма которых равна 1372. Из них нужно составить набор более чем из семи чисел, сумма которых равна 1 220. Значит, нужно убрать числа, которые в сумме дают 152.

Очевидно, числа 190, 285 и 570 принадлежат набору.

Предположим, что 114 не принадлежит набору. Тогда нужно убрать числа, сумма которых равна $152 - 114 = 38$. С помощью чисел 6; 10; 15; 30 такую сумму получить нельзя, значит, 114 принадлежит данному набору чисел. Осталось 6 чисел, из которых можно убрать не более двух.

$152 = 57 + 95$.

Итак, набор состоит из чисел 6; 10; 15; 30; 114; 190; 285; 570.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 6; 10; 15; 30; 114; 190; 285; 570.

Решение варианта № 18

1. В городе N $280\,000 \cdot 0{,}65 = 182\,000$ взрослых. Из них 60% работают, то есть $182\,000 \cdot 0{,}6 = 109\,200$ взрослых жителей работают.

Ответ: 109 200.

2. С 11 по 17 февраля наибольшее и наименьшее количество золотовалютных резервов — 488 и 482 млрд долларов соответственно. $488 - 482 = 6$ — разность между наибольшим и наименьшим количеством золотовалютных резервов в период с 11 по 17 февраля.

Ответ: 6.

3. Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$ (см. рис. 78).

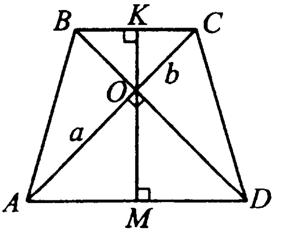


Рис. 78

Пусть $AO = a$, $OC = b$. Треугольники AOD и BOC являются равнобедренными и прямоугольными, поэтому $BC = b\sqrt{2}$, $AD = a\sqrt{2}$.

Тогда средняя линия трапеции равна $\frac{a\sqrt{2}+b\sqrt{2}}{2}$. Проведём высоту трапеции KM, проходящую через точку O. Тогда $OK = \frac{b}{\sqrt{2}}$, $OM = \frac{a}{\sqrt{2}}$ и $KM = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$, то есть высота трапеции в этом случае равна её средней линии. Таким образом, высота равна 91.

Ответ: 91.

4. Разобьём часы на 12 секторов между 12 и 1, между 1 и 2, между 2 и 2 и так далее (см. рис. 79). Стрелка могла остановиться с одинаковой вероятностью в каждом из этих секторов. Заметим, что 6 из 12 секторов удовлетворяют этому событию (они заштрихованы). Значит, искомая вероятность равна $\frac{6}{12} = 0{,}5$.

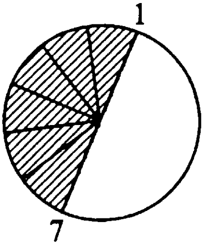


Рис. 79

Ответ: 0,5.

5. $5^{45-x} = 25^{7x}$, $5^{45-x} = 5^{14x}$, $45 - x = 14x$, $15x = 45$, $x = 3$.

Ответ: 3.

6. $S_{ABCD} = 54$ (см. рис. 80).

$$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot AB,$$

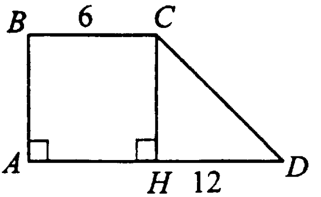


Рис. 80

$\frac{6+12}{2} \cdot AB = 54,$

$AB = 6.$

Проведём высоту CK, $AB = CH = 6.$

$DH = AD - AH = AD - BC = 6.$

В прямоугольном треугольнике CDH катеты CH и HD равны, следовательно, $\angle CDA = 45°$.

Ответ: 45.

7. Так как угловой коэффициент касательной — это значение производной в точке касания, то ищем точку пересечения графика функции $y = f'(x)$ с осью абсцисс. В этой точке угловой коэффициент касательной равен нулю, то есть касательная параллельна оси абсцисс или совпадает с ней. Это точка $(-5; 0)$. Значит, абсцисса равна -5.

Ответ: -5.

8. Объём детали равен объёму вытесненной жидкости. Объём вытесненной жидкости $\frac{3}{4}$ исходного объёма $\left(\text{вытесненная жидкость заполняет цилиндр с основанием, равным исходному, и высотой 18; } \frac{18}{24} = \frac{3}{4}\right)$.

$V = \frac{3}{4} \cdot 5000 = 3750\,(\text{см}^3).$

Ответ: 3750.

9. $\frac{9-49x^2}{3-7x} - 7x + 5 = \frac{(3-7x)(3+7x)}{3-7x} - 7x + 5 = 3 + 7x - 7x + 5 = 8$ при $x \neq \frac{3}{7}$.

Ответ: 8.

10. По условию $f_0 = 320$ Гц, $f = f_0\frac{c+u}{c-v}$ Гц, $u = 40$ (м/с), $v = 2$ (м/с). Нужно выяснить, при какой максимальной скорости c (м/с) $f \geqslant 360$ Гц. Решим неравенство $320\frac{c+40}{c-2} \geqslant 360$ относительно c.

$32(c+40) \geqslant 36(c-2),\ 32c + 32 \cdot 40 \geqslant 36c - 36 \cdot 2,$

$4c \leqslant 32 \cdot 40 + 36 \cdot 2,\ c \leqslant 320 + 18,\ c \leqslant 338.$

Максимальная скорость $c = 338$ (м/с).

Ответ: 338.

11. Пусть v — скорость велосипедиста на пути из A в B, тогда $(v+5)$ — его скорость на пути из B в A (см. рис. 81).

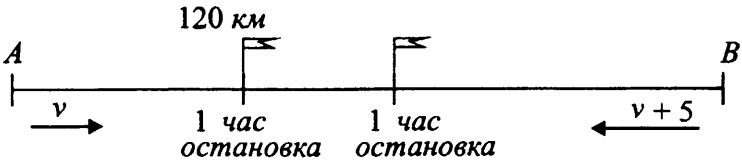


Рис. 81

Составим уравнение $\dfrac{120}{v} = \dfrac{120}{v+5} + 2$,

$120(v+5) = 120v + 2v(v+5)$,

$2v^2 + 10v - 600 = 0$,

$v^2 + 5v - 300 = 0$,

$v = \dfrac{-5 \pm \sqrt{1225}}{2} = \dfrac{-5 \pm 35}{2}$.

$v_1 = \dfrac{-5-35}{2} < 0$, $v_2 = 15$.

$v_2 + 5 = 20$.

Скорость велосипедиста на пути из B в A равна 20 км/ч.

Ответ: 20.

12. $y = -\dfrac{x^2 + 25\,600}{x} = -x - \dfrac{25\,600}{x}$.

$y' = -1 + \dfrac{25\,600}{x^2} = \dfrac{25\,600 - x^2}{x^2} = \dfrac{(160-x)(160+x)}{x^2}$.

$y' = 0$ при $x = 160$ или $x = -160$, y' не существует при $x = 0$.

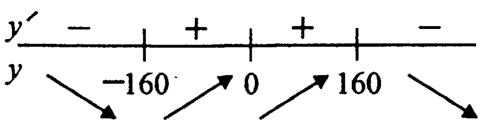


Рис. 82

Точка минимума -160.

Ответ: -160.

13. а) $\cos 6x + \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - 3x\right) = 1$,

$1 - 2\sin^2 3x - \sqrt{2}\sin 3x = 1$; $2\sin^2 3x + \sqrt{2}\sin 3x = 0$,

$\sqrt{2}\sin 3x(\sqrt{2}\sin 3x + 1) = 0$,

1) $\sin 3x = 0, 3x = k\pi, x = \dfrac{k\pi}{3}, k \in Z$.

2) $\sqrt{2}\sin 3x + 1 = 0, \sin 3x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$,

2.1. $3x = -\frac{\pi}{4} + 2p\pi, x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2p\pi}{3}, p \in Z$;

2.2. $3x = -\frac{3\pi}{4} + 2q\pi, x = -\frac{\pi}{4} + \frac{2q\pi}{3}, q \in Z$.

б) Решая неравенство $0 < x < \frac{\pi}{2}$, где x является одним их найденных в п. а) корней, получим корни $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}$.

Например, решим неравенство $0 < x < \frac{\pi}{2}$, где x является корнем, полученным в п. 2.1.

$0 < -\frac{\pi}{12} + \frac{2p\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$.

Умножим неравенство на $\frac{12}{\pi}$, получаем:

$0 < -1 + 8p < 6$,
$1 < 8p < 7$,
$\frac{1}{8} < p < \frac{7}{8}$.

Так как $p \in Z$, то решений нет.

Ответ: а) $\frac{k\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{12} + \frac{2p\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{4} + \frac{2q\pi}{3}$, $k, p, q \in Z$; б) $\frac{\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{12}$.

14. а) На основании условия рассмотрим чертёж (см. рис. 83).

SO — высота пирамиды, PT — средняя линия треугольника ABD, $OE = \frac{1}{6}OS$, $\angle SAC = 60°$, O_1 — середина AO.

$PT \parallel BD$ (как средняя линия $\triangle ABD$), поэтому $PT \parallel SBD$. Значит, α пересекает плоскость SBD по прямой параллельной PT (а значит, и BD), проходящей через точку E.

Обозначим точки пересечения этой прямой с рёбрами SB и SD через K и L соответственно.

Точки O_1 и E лежат в плоскости α, значит, прямая O_1E также лежит в этой плоскости. Обозначим через M точку пересечения этой прямой с ребром SC. Соединяя последовательно точки T, P, K, M, L и T, получим искомое сечение.

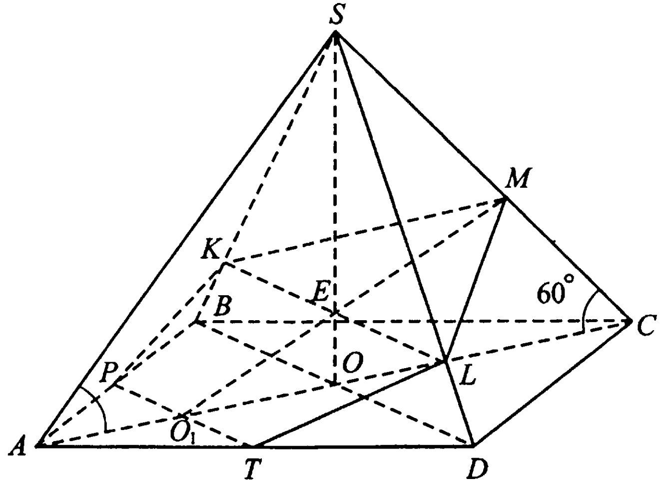


Рис. 83

Так как $\angle SAC = \angle SCA = 60°$, то $\triangle SAC$ является равносторонним. Его высоты являются медианами и пересекаются в точке F, которая делит высоты в отношении $2:1$, считая от вершины. Рассмотрим рисунок 84, где AN — высота $\triangle SAC$.

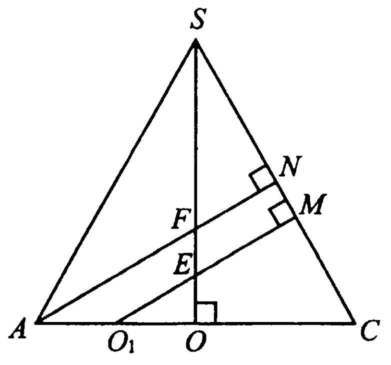


Рис. 84

По условию $OE = \frac{1}{6}OS$, по свойству медиан $OF = \frac{1}{3}OS$, значит, E является серединой OF. Так как O_1 является серединой OA, то O_1E является средней линией $\triangle FOA$. Следовательно, $O_1E \parallel AF$.

Так как $AF \perp SC$, то $O_1E \perp SC$ ($O_1M \perp SC$).

$DB \perp ASC$, так как $DB \perp OS$ и $DB \perp OA$. $LK \parallel BD$, согласно вышесказанному, поэтому $LK \perp ASC$. Отсюда следует, что $LK \perp SM$.

Отсюда следует, что $\alpha \perp SC$ (α проходит через пересекающиеся прямые LK и O_1E, перпендикулярные SC).

б) $FN = \frac{1}{3}AN = \frac{AC\sqrt{3}}{6}$. Но $AC = a\sqrt{2}$, где через a обозначена сторона основания пирамиды. Тогда $FN = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

$\triangle ESM \sim \triangle FSN$, $\frac{EM}{FN} = \frac{ES}{FS} = \frac{5}{4}$.

Отсюда $EM = \frac{5FN}{4} = \frac{5a\sqrt{6}}{24}$. Так как $a = 4{,}8 = \frac{24}{5}$, то $EM = \sqrt{6}$.

$\frac{MS}{SN} = \frac{ES}{FS} = \frac{5}{4}$.

Поэтому $MS = \frac{5SN}{4}$. Так как $SC = a\sqrt{2}$, то $SN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, поэтому
$MS = \frac{5SN}{4} = \frac{5a\sqrt{2}}{8} = \frac{5 \cdot 24\sqrt{2}}{8 \cdot 5} = 3\sqrt{2}$.

Аналогично $LK = \frac{5}{6}DB$, $DB = a\sqrt{2}$, значит, $LK = \frac{5a\sqrt{2}}{6} =$
$= \frac{5 \cdot 24\sqrt{2}}{6 \cdot 5} = 4\sqrt{2}$.

$V_{SKLM} = \frac{1}{3}S_{KLM} \cdot SM = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}LK \cdot EM \cdot MS = \frac{1}{6} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} \cdot 3\sqrt{2} = 4\sqrt{6}$.

Ответ: $4\sqrt{6}$.

15. Заметим сначала, что $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = (1 - x)^4$ и $-x^2 + x = (1 - x)x$.

ОДЗ неравенства являются все решения системы:

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 > 0, \\ 1 - x > 0, \\ 1 - x \neq 1, \\ -x^2 + x > 0; \end{cases} \qquad 0 < x < 1.$$

Преобразуем неравенство, учитывая ОДЗ.

$\log_x(1 - x) + 1 + \log_{1-x} x > 3;$

$\log_x(1-x)+\log_{1-x}x-2>0.$

Сделаем замену $\log_x(1-x)=t$. Тогда неравенство принимает вид:
$t+\frac{1}{t}-2>0;\ \frac{t^2-2t+1}{t}>0;\ \frac{(t-1)^2}{t}>0.$

Множеством его решений является множество $(0;1)\cup(1;+\infty)$.

$$\left[\begin{array}{l}0<\log_x(1-x)<1,\\ \log_x(1-x)>1;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\log_x(1-x)>\log_x x,\\ \log_x 1<\log_x(1-x)<\log_x x;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}(x-1)(1-2x)>0,\\ \begin{cases}(x-1)x<0,\\ (x-1)(1-2x)<0;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}<x<1,\\ \begin{cases}0<x<1,\\ \left[\begin{array}{l}x<\frac{1}{2},\\ x>1;\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \qquad \begin{cases}0<x<1,\\ x\neq\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Множеством решений неравенства является множество: $(0;\ 0{,}5)\cup(0{,}5;\ 1)$.

Ответ: $(0;\ 0{,}5)\cup(0{,}5;\ 1)$.

16. а) Так как окружности вписаны в некоторый угол, то их центры лежат на одной прямой, являющейся биссектрисой этого угла. При этом ни одна из окружностей не может лежать внутри другой, так как в противном случае внутренняя окружность не будет касаться сторон указанного угла.

Отсюда следует, что существует единственная возможность, указанная на рис. 85.

Обозначим заданный угол через ABC, а центры окружностей через O_1, O_2 и O_3 соответственно.

Проведём из центров окружностей радиусы O_1T, O_2E и O_3F в точки касания со стороной AB.

Тогда O_1T , O_2E и O_3F перпендикулярны AB.

Из центра O_1 меньшей окружности опустим перпендикуляр O_1K на радиус O_2E. Получим прямоугольник O_1TEK. Тогда $EK=TO_1=r_1$. Следовательно, $O_2K=O_2E-KE=r_2-r_1$.

Так как $O_1K\parallel AB$, то $\angle ABO_2=\angle KO_1O_2$. Отметим также, что $O_2O_1=r_2+r_1$.

Отсюда следует, что $\frac{r_2-r_1}{r_2+r_1}=\frac{O_2K}{O_2O_1}=\sin\angle KO_1O_2=\sin\angle ABO_2$.

Совершенно аналогично убеждаемся, что

$\frac{r_3-r_2}{r_3+r_2}=\frac{O_3S}{O_3O_2}=\sin\angle SO_2O_3=\sin\angle ABO_2$, где $O_2S\perp O_3F$.

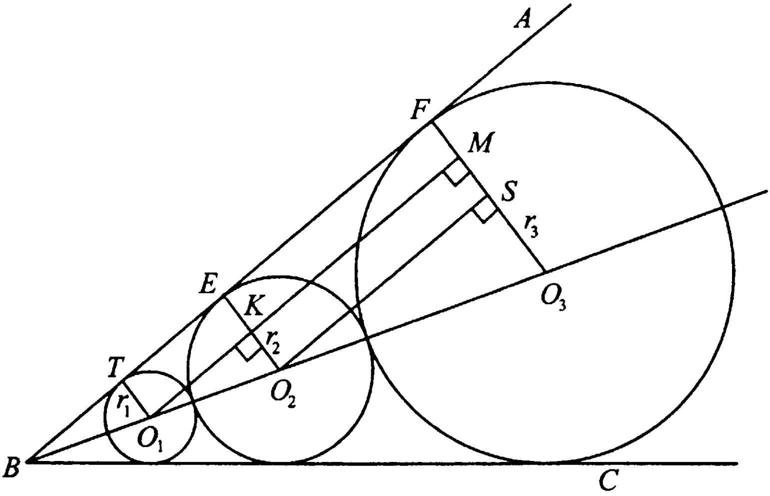


Рис. 85

Наконец, рассматривая треугольник O_1MO_3, в котором $MO_1 \perp O_3M$, получаем:

$$\frac{r_3 - r_1}{r_3 + 2r_2 + r_1} = \sin\angle MO_1O_3 = \sin\angle ABO_2.$$

Таким образом, $\dfrac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} = \dfrac{r_3 - r_2}{r_3 + r_2} = \dfrac{r_3 - r_1}{r_3 + 2r_2 + r_1} = \sin\angle ABO_2$.

б) Подставляя в полученное равенство $\dfrac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} = \sin\angle ABO_2$ заданные значения r_1 и r_2, получаем:

$$\sin\angle ABO_2 = \frac{1 - \dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}{1 + \dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \frac{2+\sqrt{3}-2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Так как заданный угол ($\angle ABC$) не превосходит π, то $\angle ABO_2 < \dfrac{\pi}{2}$.

Значит, $\angle ABO_2 = \dfrac{\pi}{3}$, а угол ABC равен $\dfrac{2\pi}{3}$.

Ответ: $\dfrac{2\pi}{3}$.

17. Обозначим через x, y и z количество пачек пельменей категорий А, Б и В соответственно, проданных за указанную неделю.

Тогда согласно условию получаем систему:

$$\begin{cases} x+y+z=46, \\ x<z, \\ y=10z; \end{cases} \quad \begin{cases} x+10z+z=46, \\ x<z; \end{cases} \quad \begin{cases} x+11z=46, \\ x<z. \end{cases}$$

Ясно, что x — неотрицательное целое число, а z является натуральным числом.

Если $z=1, x=35$ (из первого условия системы). Найденные числа x и z не удовлетворяют неравенству $x<z$.

Если $z=2, x=24$. Найденные числа x и z не удовлетворяют неравенству $x<z$.

Если $z=3, x=13$. Найденные числа x и z не удовлетворяют неравенству $x<z$.

Если $z=4$, то $x=2$. Найденные числа x и z удовлетворяют неравенству $x<z$.

$z>4$ не может быть, согласно равенству $x+11z=46$ и тому, что x является неотрицательным целым числом.

Ответ: 2.

18. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \left(x-\dfrac{a^2+2}{4}\right)^2+a^2x^4=\dfrac{a^2(a^2+1)}{16}, \\ y=ax^2; \end{cases}$$

равносильную исходной системе.

Преобразуем первое её уравнение:

$$\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{a^2}{4}\right)^2+a^2x^4=\frac{a^4}{16}+\frac{a^2}{16};$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{a^2}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{a^4}{16}+a^2x^4=\frac{a^4}{16}+\frac{a^2}{16};$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{a^2}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)+a^2\left(x^4-\frac{1}{16}\right)=0;$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{a^2}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)+a^2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\frac{1}{4}\right)=0;$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)+a^2\left(x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{3}{8}\right)\right)=0. \qquad (*)$$

Разделим $x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{3}{8}$ на $\left(x-\frac{1}{2}\right)$:

Получаем: $x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{3}{8}=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+x+\frac{3}{4}\right)$.

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{3}{8} & x-\frac{1}{2} \\ \cline{2-2}
-\ x^3-\frac{1}{2}x^2 \qquad\qquad & x^2+x+\frac{3}{4} \\ \cline{1-1}
x^2+\frac{1}{4}x-\frac{3}{8} & \\
-\ x^2-\frac{1}{2}x \quad\ \ & \\ \cline{1-1}
\frac{3}{4}x-\frac{3}{8} & \\
-\ \frac{3}{4}x-\frac{3}{8} & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Подставляем в уравнение $(*)$ и выносим ещё раз за скобки $\left(x-\frac{1}{2}\right)$:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(1+a^2\left(x^2+x+\frac{3}{4}\right)\right)=0.$$

Так как $x^2+x+\frac{3}{4}>0$ для любого x, то $1+a^2\left(x^2+x+\frac{3}{4}\right)>0$.

Следовательно, уравнение имеет единственный корень $x=\frac{1}{2}$ при любом значении a. Значит, система имеет единственное решение $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}a\right)$ при любых значениях a.

Ответ: $(-\infty;+\infty)$.

19. а) Так как $(4;6)$ принадлежит M, то, согласно свойству (1), $(4\cdot2;6\cdot2)$ принадлежит M, значит, точка $(8;12)$ принадлежит M.

Так как $(4;6)=(2\cdot2;2\cdot3)$, то, согласно (1), $(2\cdot2\cdot2;\underline{2\cdot3\cdot2})$ принадлежит M. Аналогично, так как $(2\cdot2;2\cdot3)$ принадлежит M, то $(\underline{2\cdot2\cdot3};2\cdot3\cdot3)$ принадлежит M.

Заметим, что подчёркнутые одной чертой числа $\underline{2\cdot3\cdot2}$ и $\underline{2\cdot2\cdot3}$ равны, поэтому, согласно (2), $(2\cdot2\cdot2;2\cdot3\cdot3)$ принадлежит M, то есть $(8;18)$ принадлежит M.

Из предыдущего, согласно (1), получаем, что $(16;\underline{36})$ принадлежит M. Так как $(2\cdot2;2\cdot3)$ принадлежит M, то $(2\cdot2\cdot3\cdot3;2\cdot3\cdot3\cdot3)$ принадлежит M, то есть $(\underline{36};54)$ принадлежит M. Отсюда, согласно свойству (2), $(16;54)$ принадлежит M.

б) Точка $(2\cdot 2^1; 2\cdot 3^1)$ принадлежит M по условию. Выше установлено, что точки $(8;18)((8;18) = (2\cdot 2^2; 2\cdot 3^2))$ и $(16;54)((16;54) = (2\cdot 2^3; 2\cdot 3^3))$ также принадлежат M.

Рассмотрим теперь точку $(2\cdot 2^3; 2\cdot 3^3)$ из множества M. Умножая числа пары на 2, получим, что точка $(2\cdot 2^4; \underline{2\cdot 3^3\cdot 2})$ принадлежит M.

Так как $(2\cdot 2; 2\cdot 3)$ принадлежит M, то, $(\underline{2\cdot 2\cdot 3^3}; 2\cdot 3\cdot 3^3)$ принадлежит M. Отсюда, согласно свойству (2), получаем, что пара $(2\cdot 2^4; 2\cdot 3^4)$ принадлежит M.

И вообще, если $(2\cdot 2^s; 2\cdot 3^s)$ принадлежит M, то, умножая числа пары на 2, получаем, что $(2\cdot 2^{s+1}; \underline{2\cdot 3^s\cdot 2})$ принадлежит M.

Так как $(2\cdot 2; 2\cdot 3)$ принадлежит M, то, умножая числа пары на 3^s ($s \in N$) получим, что пара $(\underline{2\cdot 2\cdot 3^s}; 2\cdot 3\cdot 3^s)$ принадлежит M.

Отсюда, согласно свойству (2), получаем, что $(2\cdot 2^{s+1}; 2\cdot 3^{s+1})$ принадлежит M. Тем самым доказано, что $(2\cdot 2^k; 2\cdot 3^k)$ принадлежит M для любого натурального k.

в) Выше установлено, что точка $(2\cdot 2^m; 2\cdot 3^m)$ принадлежит M. Тогда, умножая числа пары на 3^n, получим, что точка $(2\cdot 2^m\cdot 3^n; 2\cdot 3^{m+n})$ принадлежит M.

Совершенно аналогично убеждаемся, что точка $(2\cdot 2^p\cdot 3^q; 2\cdot 3^{p+q})$ принадлежит M. Но $m+n = p+q$ по условию, поэтому $2\cdot 3^{p+q} = 2\cdot 3^{m+n}$.

Пусть $2\cdot 3^{m+n} = A$, тогда $(2\cdot 2^m\cdot 3^n; A)$ и $(2\cdot 2^p\cdot 3^q; A)$ принадлежит M.

Учитывая, что множество M симметрично относительно прямой $y = x$, и применяя свойство (2) , получим, что $(2\cdot 2^m\cdot 3^n; 2\cdot 2^p\cdot 3^q)$ принадлежит M.

Решение варианта № 19

1. $57 = 6\cdot 9 + 3$.

Это означает, что Лиза живёт на 10 этаже.

Ответ: 10.

2. Наибольшая температура 30 мая 30 °C. Наибольшая температура 11 мая равна 20 °C.

$30 - 20 = 10$ °C.

На 10 °C наибольшая температура 13 мая превышает наибольшую температуру 11 мая.

Ответ: 10.

3. $\angle 4 = \alpha + 47°$ (см. рис. 86) про свойству внешнего угла треугольника.

Аналогично $\alpha = 32° + 29° = 61°$ (внешний угол треугольника ABC равен сумме двух внутренних, не смежных с ним).

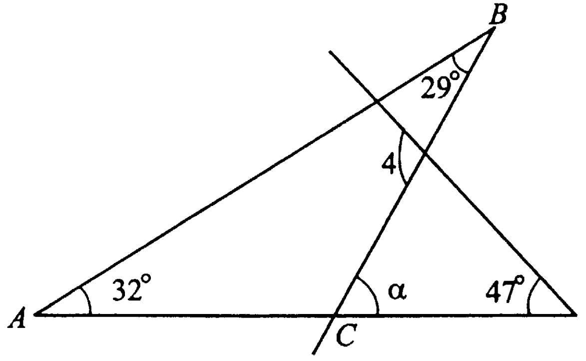


Рис. 86

$\angle 4 = 61° + 47° = 108°$.

Ответ: 108.

4. Количество спортсменок из Китая равно $40 - 19 - 13 = 8$. Тогда вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Китая, равна $\frac{8}{40} = 0{,}2$.

Ответ: 0,2.

5. $\sqrt[3]{2x+11} = -5$, $(\sqrt[3]{2x+11})^3 = (-5)^3$, $2x + 11 = -125$, $2x = -136$, $x = -68$.

Ответ: -68.

6. Площадь треугольника найдём по формуле $S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$. По условию $a = b = 11, \sin\alpha = \sin 30° = 0{,}5$.

$S = \frac{1}{2} \cdot 11^2 \cdot 0{,}5 = 30{,}25$.

Ответ: 30,25.

7. Скорость материальной точки — это $x'(t)$, при этом $x'(t) = 6t^2 + 2t - 5$.

$x'(4) = 6 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 - 5 = 96 + 8 - 5 = 99$.

Ответ: 99.

8. Площади верхней и нижней граней равны $4 \cdot 50 = 200$ каждая, аналогично найдём площади левой и правой боковых граней: $35 \cdot 4 = 140$. Найдём теперь площади передней и задней граней: $35 \cdot 50 - 7 \cdot 10 = 1750 - 70 = 1680$. Осталось найти площадь четырёх граней вырезанного прямоугольного параллелепипеда: $10 \cdot 4 + 7 \cdot 4 + 10 \cdot 4 + 7 \cdot 4 = 4 \cdot 34 = 136$.

Итак, площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке, равна $200 \cdot 2 + 140 \cdot 2 + 1680 \cdot 2 + 136 = 400 + 280 + 3360 + 136 = 4176$.

Ответ: 4176.

9. $\dfrac{7\sqrt{x}+9}{\sqrt{x}} - \dfrac{9\sqrt{x}}{x} = 7 + \dfrac{9}{\sqrt{x}} - \dfrac{9}{\sqrt{x}} = 7$.

Ответ: 7.

10. По условию $\mathcal{E} = 100$ В, $r = 1$ Ом, $U = \dfrac{\mathcal{E}R}{R+r}$. При каком наименьшем значении сопротивления нагрузки $U \geqslant 80$ В?

$\dfrac{100R}{R+1} \geqslant 80,\ 100R \geqslant 80R + 80,\ 20R \geqslant 80,\ R \geqslant 4$.

Наименьшее сопротивление нагрузки равно 4 Ом.

Ответ: 4.

11. Пусть x л воды в минуту пропускает первая труба, $(x - 6)$ л воды в минуту пропускает вторая труба. Первая труба заполнит резервуар в 140 л за $\dfrac{140}{x}$ мин, а вторая заполнит резервуар в 100 л за $\dfrac{100}{x-6}$ мин.

$\dfrac{100}{x-6} - \dfrac{140}{x} = 5,\ \dfrac{20}{x-6} - \dfrac{28}{x} = 1,$

$20x - 28(x-6) = x(x-6).$

$x^2 + 2x - 168 = 0$

$x = -1 \pm 13.$

Так как $x > 0$, то $x = 12$.

Ответ: 12.

12. ОДЗ. $x > 0$. $y' = 8x - 26 + \dfrac{15}{x} = \dfrac{8x^2 - 26x + 15}{x} = \dfrac{8\left(x - \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right)}{x}$.

Так как $x > 0$, $y'(x) = 0$ при $x = \dfrac{3}{4}$ и $x = 52$. При этом $y'(x) > 0$ при $x > \dfrac{5}{2}$ и $x < \dfrac{3}{4}$ и $y'(x) < 0$ при $34 < x < \dfrac{5}{2}$ (см. рис. 87).

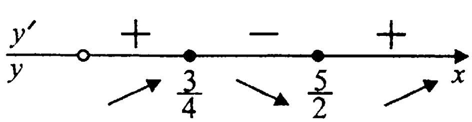


Рис. 87

Ясно, что единственной точкой максимума является $x = \frac{3}{4} = 0{,}75$.

Ответ: 0,75.

13. а) ОДЗ уравнения является множеством всех таких x, что $\cos x \neq 0$, то есть $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$.

Преобразуем уравнение, пользуясь формулой $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

$\sin^3 x - \dfrac{1 - \cos^2 x}{4\cos x} = 0,$

$\sin^3 x - \dfrac{\sin^2 x}{4\cos x} = 0,$

$\dfrac{4\sin^3 x\cos x - \sin^2 x}{4\cos x} = 0,$

$\dfrac{\sin^2 x(4\sin x\cos x - 1)}{4\cos x} = 0.$

В ОДЗ уравнения получим равносильное уравнение $\sin^2 x(4\sin x\cos x - 1) = 0$.

Так как $2\sin x\cos x = \sin 2x$, то получаем уравнение $\sin^2 x(2\sin 2x - 1) = 0$.

1) $\sin^2 x = 0$, $\sin x = 0$, $x = \pi m, m \in Z$.

2) $2\sin 2x - 1 = 0$, $\sin 2x = \dfrac{1}{2}$,

2.1. $2x = \arcsin\dfrac{1}{2} + 2\pi t,$

$2x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi t$, $x = \dfrac{\pi}{12} + \pi t, t \in Z$.

2.2. $2x = \pi - \arcsin\dfrac{1}{2} + 2\pi s,$

$2x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi s$, $x = \dfrac{5\pi}{12} + \pi s, s \in Z$.

Ни одно из найденных значений x не совпадает с $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$.

Поэтому получаем следующие решения уравнения:

πm, $m \in Z$; $\dfrac{\pi}{12} + \pi t$, $t \in Z$; $\dfrac{5\pi}{12} + \pi s, s \in Z$.

б) Для отыскания корней, принадлежащих указанному промежутку, решаем неравенства:

$$-3\pi \leqslant \pi m \leqslant -\frac{5\pi}{2},$$

$$-3 \leqslant m \leqslant -\frac{5}{2}, m \in Z,$$

$$m = -3,\ x = -3\pi;$$

$$-3\pi \leqslant \frac{\pi}{12} + \pi t \leqslant -\frac{5\pi}{2},$$

$$-3 \leqslant \frac{1}{12} + t \leqslant -\frac{5}{2},$$

$$-3 - \frac{1}{12} \leqslant t \leqslant -\frac{5}{2} - \frac{1}{12},$$

$$-\frac{37}{12} \leqslant t \leqslant -\frac{31}{12}, t \in Z,$$

$$t = -3,\ x = \frac{\pi}{12} - 3\pi = -\frac{35}{12}\pi;$$

$$-3\pi \leqslant \frac{5\pi}{12} + \pi s \leqslant -\frac{5\pi}{2},$$

$$-3 \leqslant \frac{5}{12} + s \leqslant -\frac{5}{2},$$

$$-3 - \frac{5}{12} \leqslant s \leqslant -\frac{5}{2} - \frac{5}{12},$$

$$-\frac{41}{12} \leqslant s \leqslant -\frac{35}{12}, s \in Z,$$

$$s = -3,\ x = \frac{5\pi}{12} - 3\pi = -\frac{31}{12}\pi.$$

Ответ: а) πm; $\frac{\pi}{12} + \pi t$; $\frac{5\pi}{12} + \pi s$, $m, t, s \in Z$; б) -3π; $-\frac{35}{12}\pi$; $-\frac{31}{12}\pi$.

14. а) Рассмотрим рисунок 88.

а) Из условия следует, что высота пирамиды проектируется в точку пересечения бóльших диагоналей основания.

Сечение проходит через диагональ AC и пересекает плоскость BSE по прямой TK, где T — точка пересечения BE и AC, а K — точка пересечения с ребром SE.

SO лежит в плоскости BSE и по условию $\angle SEO = 45°$.

Проекция TK на плоскость основания принадлежит плоскости BSE и лежит на диагонали BE.

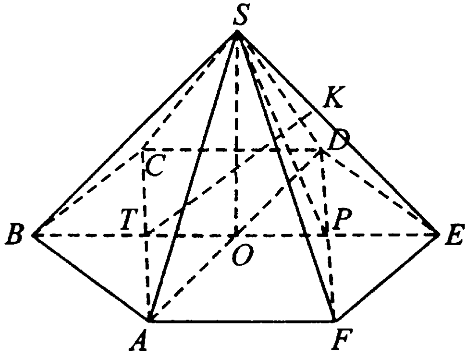


Рис. 88

По свойству правильного шестиугольника $TE \perp AC$. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах $TK \perp AC$.

Итак, $AC \perp BSE$, значит, $AC \perp SE$.

В равнобедренном треугольнике BSE угол S равен 90°, так как $\angle SEO = \angle SBO = 45°$, значит, треугольник BSE — прямоугольный.

По условию O является центром окружности, описанной около правильного шестиугольника. Радиус этой окружности равен 6. Поэтому $BE = 2 \cdot BO = 2 \cdot 6 = 12$. Точка T является точкой пересечения диагоналей ромба $OABC$, поэтому $BT = OT = \frac{1}{2}BO = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$.

Рассмотрим вспомогательный рисунок 89.

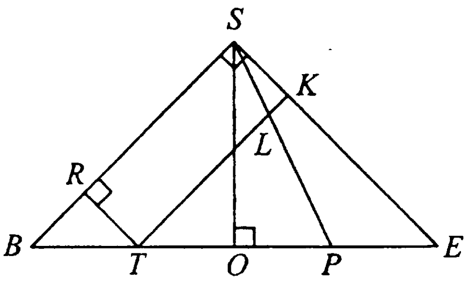


Рис. 89

По условию $SK = \frac{3}{\sqrt{2}}$. Опустим из точки T перпендикуляр TR на прямую BS. В треугольнике BTR угол $TBR = 45°$и $BT = 3$, поэтому $TR = 3 \cdot \sin 45° = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Получилось, что $TR = SK$. Так как $TR = SK$ и $TR \parallel SK$, то $TRSK$ является параллелограммом, $TK \parallel BS$ и $TK \perp SE$.

Итак, $SE \perp AC$ и $SE \perp TK$, значит, SE перпендикулярно сечению.

б) На рисунке 88 точка P является пересечением DF и BE, поэтому SP принадлежит BSE, P делит DF и OE пополам.

Обозначим через L точку пересечения TK и SP (см. рис 89).

$\Delta BSE \sim \Delta TKE$, $\frac{BE}{TE} = \frac{4}{3} = \frac{BS}{TK}$, $TK = \frac{3}{4}BS$.

Но $BS = BE \cdot \cos 45° = 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$, $TK = \frac{3}{4} \cdot 6\sqrt{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$.

$\Delta BSP \sim \Delta TLP$, $\frac{BS}{TL} = \frac{BP}{TP} = \frac{3}{2}$, $TL = \frac{2}{3}BS = \frac{2}{3} \cdot 6\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

Отсюда $LK = TK - TL = \frac{9\sqrt{2}}{2} - 4\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Заметим, что $AC \parallel DF$, значит, $AC \parallel SDF$. Поэтому сечение пересекает плоскость SDF по прямой параллельной AC. Эта прямая проходит через точку L. Обозначим через M и N соответственно точки пересечения её с рёбрами SD и SF (см. рис. 90).

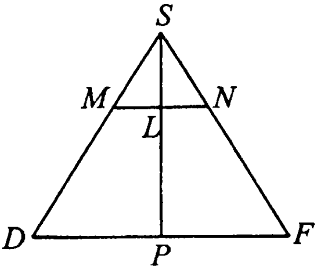


Рис. 90

$$SL = \sqrt{SK^2 + KL^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{5}.$$

$SP = \sqrt{SO^2 + OP^2}$ (см. рис. 89).

Так как $SO = OE$, то $SP = \sqrt{OE^2 + OP^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

$\frac{MN}{DF} = \frac{SL}{SP} = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{3}$, $MN = \frac{1}{3}DF$, но из ΔDEF по теореме косинусов

$DF = \sqrt{6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos 120°} = \sqrt{72 + 36} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$.

Значит, $MN = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$.

Наконец, заметим, что в сечении получится пятиугольник (см. рис. 91), где $MN \parallel AC$, $KT \perp AC$.

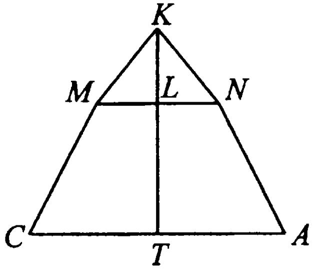


Рис. 91

Поэтому $S_{ANKMC} = S_{ANMC} + S_{MKN} = \frac{1}{2} \cdot (6\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) \cdot 4\sqrt{2} +$

$+\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} = 16\sqrt{6} + \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{33\sqrt{6}}{2}$.

Ответ: $\frac{33\sqrt{6}}{2}$.

15. Сделаем замену $3^x = t$, $(t > 0)$.

Получим неравенство $\frac{12t + 61}{t^2 - 6t - 27} \leqslant -2{,}25$,

$$\frac{12t + 61}{t^2 - 6t - 27} + \frac{9}{4} \leqslant 0,$$

$$\frac{48t + 244 + 9t^2 - 54t - 243}{4(t^2 - 6t - 27)} \leqslant 0,$$

$$\frac{9t^2 - 6t + 1}{t^2 - 6t - 27} \leqslant 0,$$

$$\frac{(3t - 1)^2}{(t - 9)(t + 3)} \leqslant 0.$$

Решаем неравенство методом интервалов (см. рис. 92).

Неравенство выполняется при $-3 < t < 9$.

Сделаем обратную замену, получим: $-3 < 3^x < 9$; $3^x < 3^2$; $x < 2$.

Ответ: $(-\infty, 2)$.

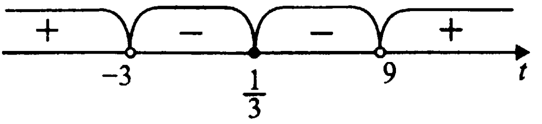


Рис. 92

16. Проведём через точки касания большей и меньших окружностей диаметры большей окружности. Получим две взаимно перпендикулярные прямые, проходящие через центр O большей окружности, так как дуга l между точками касания равна 90°, а значит, и центральный угол, опирающийся на неё, равен 90°.

При этом центры малых окружностей принадлежат указанным диаметрам. Рассмотрим рисунок 93. $OO_1 = AO - AO_1 = \sqrt{2}$.

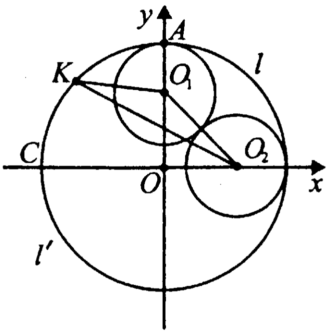


Рис. 93

В системе координат xOy, согласно условию: $O_1(0; \sqrt{2})$, $O_2(\sqrt{2}; 0)$.

Уравнение малой окружности с центром в точке O_1: $x^2+(y-\sqrt{2})^2 = 1$.

Уравнение малой окружности с центром в точке O_2: $(x-\sqrt{2})^2+y^2 = 1$.

$$\begin{cases} x^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 1, \\ (x - \sqrt{2})^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Вычитая из первого равенства $x^2+y^2-2y\sqrt{2}+2 = 1$ второе равенство $x^2 - 2x\sqrt{2} + 2 + y^2 = 1$, получим $-2y\sqrt{2} + 2x\sqrt{2} = 0$, $x = y$.

Подставляя x вместо y в уравнении окружности $x^2+y^2-2y\sqrt{2}+2 = 1$, получим $x^2 + x^2 - 2x\sqrt{2} + 1 = 0$; $2x^2 - 2x\sqrt{2} + 1 = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2-2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Получаем единственное значение x, а значит, и единственное значение y.

Отсюда следует, что окружности пересекаются в одной точке, поэтому они касаются друг друга.

б) Так как точка K делит дугу l' в отношении $1 : 5$, то она делит дугу AC пополам и лежит на прямой $y = -x$.

Найдём координаты точки K, для чего подставим $-x$ вместо y в уравнение большей окружности:

$$x^2 + y^2 = (1 + \sqrt{2})^2,$$
$$x^2 + x^2 = (1 + \sqrt{2})^2,$$
$$2x^2 = (1 + \sqrt{2})^2,$$
$$x^2 = \frac{(1 + \sqrt{2})^2}{2},$$
$$x = \pm\left(\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right).$$

Так как точка K принадлежит второй четверти, то

$$x = -\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$
$$y = \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$
$$K\left(-\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}; \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right).$$

Так как $O_1(0; \sqrt{2})$, $O_2(\sqrt{2}; 0)$, то

$$O_1K = \sqrt{\left(\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{2} - \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2} =$$
$$= \sqrt{\left(\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{2}} = \sqrt{3};$$
$$O_2K = \sqrt{\left(\sqrt{2} + \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2} =$$
$$= \sqrt{\left(\frac{3 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{14 + 8\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{7 + 4\sqrt{2}}.$$

Так как окружности касаются внешним образом, то $O_1O_2 = 2$ (сумма радиусов меньших окружностей).

Пусть a, b и c — стороны треугольника O_1O_2K: $a = 2$, $b = \sqrt{3}$, $c = \sqrt{7 + 4\sqrt{2}}$.

Тогда из формулы Герона следует, что

$$S_{O_1O_2K} = \sqrt{\frac{(a+b)+c}{2}\cdot\frac{(a+b)-c}{2}\cdot\frac{c-(a-b)}{2}\cdot\frac{c+(a-b)}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(a+b)^2-c^2}{4}\cdot\frac{c^2-(a-b)^2}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(2+\sqrt{3})^2-(7+4\sqrt{2})}{4}\cdot\frac{(7+4\sqrt{2})-(2-\sqrt{3})^2}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4+4\sqrt{3}+3-7-4\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{7+4\sqrt{2}-4+4\sqrt{3}-3}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{4}\cdot\frac{4(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{4}} = \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \sqrt{1} = 1.$$

Ответ: 1.

17. По условию за 19 месяцев долг должен уменьшиться от 12 млн рублей до 0. При этом каждый месяц долг уменьшается на одно и то же число рублей. Значит, последовательность долгов на 15-е число будет следующее:

$$12,\ \frac{18}{19}\cdot 12,\ \frac{17}{19}\cdot 12,\ \ldots,\ \frac{2}{19}\cdot 12, \frac{1}{19}\cdot 12,\ 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 2%, тогда последовательность размеров долга на 1-е число каждого месяца такова:

$$12\cdot 1{,}02;\ \frac{18}{19}\cdot 12\cdot 1{,}02;\ \frac{17}{19}\cdot 12\cdot 1{,}02;\ \ldots;\ \frac{1}{19}\cdot 12\cdot 1{,}02.$$

Всего надо будет выплатить:

$$12 + 12\cdot 0{,}02\cdot\left(\frac{1}{19}+\frac{2}{19}+\ldots+\frac{18}{19}+\frac{19}{19}\right) =$$

$$= 12 + 12\cdot 0{,}02\cdot\frac{\frac{1}{19}+\frac{19}{19}}{2}\cdot 19 = 12 + 12\cdot 0{,}02\cdot\frac{20\cdot 19}{19\cdot 2} =$$

$$= 12 + 12\cdot 0{,}02\cdot 10 = 12 + 12\cdot 0{,}2 = 14{,}4.$$

Выясним, на сколько процентов 14,4 больше 12.

12 — 100%

14,4 — x

$$x = \frac{14{,}4\cdot 100\%}{12} = 120\%.$$

$120\% - 100\% = 20\%.$

Ответ: 20.

18. Преобразуем первое уравнение системы. Пусть $x^2 + y^2 = t$, тогда
$t^2 - (2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y)t + 2\sqrt{2}x \cdot 2\sqrt{2}y = 0,$
$(t - 2\sqrt{2}x)(t - 2\sqrt{2}y) = 0.$

Сделаем обратную замену, получим
$(x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x)(x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}y) = 0$
$((x - \sqrt{2})^2 + y^2 - 2)(x^2 + (y - \sqrt{2})^2 - 2) = 0.$

Уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}(x - \sqrt{2})^2 + y^2 - 2 = 0,\\ x^2 + (y - \sqrt{2})^2 - 2 = 0;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}(x - \sqrt{2})^2 + y^2 = (\sqrt{2})^2,\\ x^2 + (y - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{2})^2.\end{array}\right.$$

Первое уравнение является уравнением окружности с центром в точке $O_1(\sqrt{2}; 0)$ и радиусом $\sqrt{2}$, а второе уравнение является уравнением окружности с центром в точке $O_2(0; \sqrt{2})$ и радиусом $\sqrt{2}$.

Решением указанной совокупности уравнений будет объединение множества точек, лежащих на упомянутых окружностях.

Непосредственно путём подстановки, убедимся, что окружности пересекаются в двух точках $(0; 0)$ и $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

Рассмотрим рисунок 94.

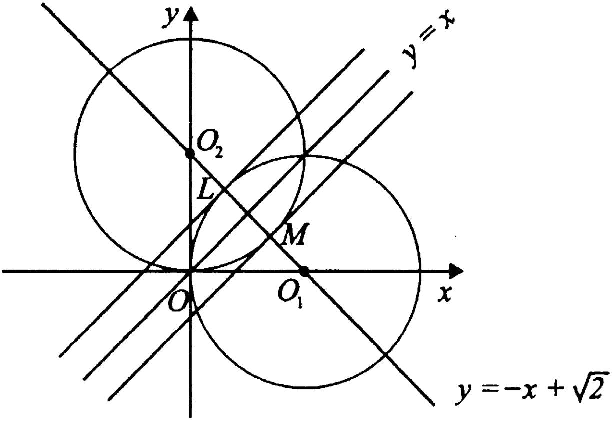


Рис. 94

Теперь найдём, при каких значениях a прямая $y = x + a$ пересекает одновременно обе окружности, исключив прямую, проходящую через общие точки и прямые, являющиеся касательными к окружностям в точках L и M.

Прямая, проходящая через общие точки, имеет уравнение $y = x$.

Для нахождения уравнения прямой $y = x + a$, проходящей через точку L, решим систему, отметив, что точка L лежит на прямой $y = -x + \sqrt{2}$ (прямой, проходящей через точки O_1 и O_2).

$\begin{cases} y = -x + \sqrt{2}, \\ (x - \sqrt{2})^2 + y^2 = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} y = -x + \sqrt{2}, \\ (x - \sqrt{2})^2 + (-x + \sqrt{2})^2 = 2; \end{cases}$

$\begin{cases} y = -x + \sqrt{2}, \\ 2(x - \sqrt{2})^2 = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} y = -x + \sqrt{2}, \\ x - \sqrt{2} = \pm 1; \end{cases}$

$x_1 = \sqrt{2} + 1, x_2 = \sqrt{2} - 1.$

Согласно условию $x = x_2 = \sqrt{2} - 1, y = -x + \sqrt{2} = -\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} = 1.$

Подставляем найденные значения x и y в уравнение $y = x + a$, получим $1 = \sqrt{2} - 1 + a, a = 2 - \sqrt{2}.$

Таким образом, уравнение прямой, проходящей через точку L: $y = x + 2 - \sqrt{2}.$

Из соображений симметрии делаем вывод, что уравнение прямой $y = x + a$, проходящей через точку M, будет при $a = -2 + \sqrt{2}.$

Отсюда следует, что искомыми значениями a будут $-2 + \sqrt{2} < a < 0$, $0 < a < 2 - \sqrt{2}.$

Ответ: $(-2 + \sqrt{2};\ 0) \cup (0;\ 2 - \sqrt{2}).$

19. а) Да. Например, три претендента внесли первоначально 170, 140 и 4 тысячи.

Средняя сумма тех, кто не внёс достаточную сумму, равна $\dfrac{140 + 4}{2} = 72.$

После добавления получаем взносы: 180, 150, 14. Средняя сумма тех, кто не достиг достаточную сумму, равна 14. $72 > 14$.

б) Да, это возможно. При тех же условиях, что и в пункте а) получаем, что средняя сумма тех, кто сдал первоначально достаточную сумму, равна 170 тысяч. После добавления средняя сумма тех, кто достиг достаточной суммы, равна $\dfrac{180 + 150}{2} = 165.$ $170 > 165.$

в) Пусть N — число всех претендентов, a — число претендентов, которые первоначально внесли достаточную сумму.

Тогда по условию получаем:

$130N = 160a + 125(N - a)$

$5N = 35a,$

$N = 7a$, N делится на 7.

Пусть b — число участников, у которых сумма залога стала не менее 150 тысяч после добавления. Тогда по условию получаем:

$140N = 155b + (N - b) \cdot 120,$

$20N = 35b,$

$4N = 7b$, N делится на 7.

Таким образом, $N \geqslant 7$.

Покажем, что при $N = 7$ могут выполняться все условия, указанные в пункте в).

Из 7 претендентов внесли залог первоначально: 1 — 160 тысяч, 3 по 140 тысяч, 3 по 110 тысяч.

Общая сумма залога равна $160 + 3 \cdot 140 + 3 \cdot 110 = 910$.

Средняя сумма залога $\frac{910}{7} = 130$, средняя сумма тех, кто сдал достаточную сумму $\frac{160}{1} = 160$, средняя сумма тех, кто не сдал достаточную сумму:

$$\frac{3 \cdot 140 + 3 \cdot 110}{6} = \frac{140 + 110}{2} = \frac{250}{2} = 125.$$

После добавления взносы составляют: 1 — 170, 3 по 150, 3 по 120 тысяч.

Средняя сумма тех, кто достиг достаточной суммы, равна $\frac{170 + 3 \cdot 150}{2} = \frac{620}{4} = 155$, средняя сумма тех, кто не достиг достаточной суммы $\frac{3 \cdot 120}{3} = 120$.

Ответ: а) да; б) да; в) 7.

Решение варианта № 20

1. В подъезде $4 \cdot 12 = 48$ квартир. $184 = 48 \cdot 3 + 40$. Значит, Маша живёт в четвёртом подъезде.

Ответ: 4.

2. Наименьшая температура 8 августа равна 5 °C. Наибольшая температура равна 30 °C. Тогда разность между наибольшим и наименьшим значениями температуры воздуха 8 августа равна $30 - 5 = 25$(°C).

Ответ: 25.

3. $\angle OCM = \alpha + 40°$ (как внешний угол треугольника ABC) (см. рис. 95). $\angle COM = 180° - 105° = 75°$ (смежный с углом NOC). Тогда $\angle OCM = 180° - (28° - 75°) = 77°$.

$\alpha = 77° - 40° = 37°$.

Ответ: 37.

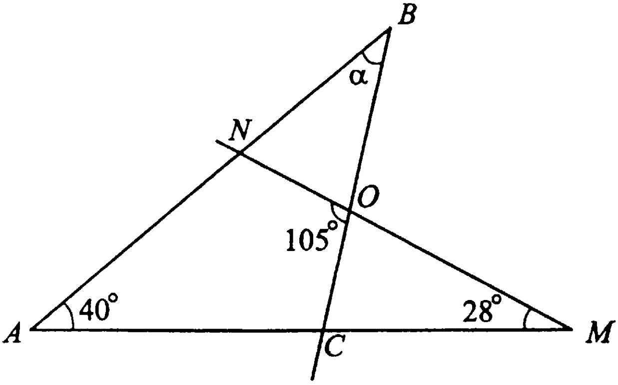


Рис. 95

4. Всего на семинар приехало $5 + 8 + 7 = 20$ учёных, 8 из которых — учёные из России. Значит, вероятность того, что шестым окажется доклад учёного из России, равна $\frac{8}{20} = 0{,}4$.

Ответ: 0,4.

5. $\sqrt{5x - 16} = 7,\ 5x - 16 = 49,\ 5x = 65,\ x = 13.$

Ответ: 13.

6. $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \sin 30°$. По условию $S = 56{,}25$, $AC = BC$, значит,

$56{,}25 = \frac{1}{2}AC^2 \cdot \frac{1}{2}$, $AC^2 = 225$, $AC = 15$.

Ответ: 15.

7. Скорость — это $x'(t)$, при этом $x'(t) = (6t^2 - 44t + 9)' = 12t - 44$.

При $t = 8$ $x'(8) = 12 \cdot 8 - 44 = 52$.

Ответ: 52.

8. Пусть S — площадь многогранника (см. рис. 96), тогда
$S_{A_1B_1KM} + S_{M_1K_1L_1N_1} + S_{NLC_1D_1} = S_{ABCD} = 200.$

$S_{AA_1B_1B} + S_{MM_1K_1K} = S_{NN_1L_1L} + S_{DD_1C_1C} = (5 + 5) \cdot 10 = 100.$

$S_{AA_1MM_1N_1ND_1D} = S_{AA_1D_1D} + S_{MM_1N_1N} = S_{BB_1KK_1L_1LC_1C} =$
$= 20 \cdot 5 + 5 \cdot 6 = 130.$

Итак, $S = 2 \cdot 200 + 2 \cdot 100 + 2 \cdot 130 = 860.$

Ответ: 860.

9. $\frac{5 - 6\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{5\sqrt{x}}{x} = \frac{5\sqrt{x} - 6x - 5\sqrt{x}}{x} = -6.$

Ответ: -6.

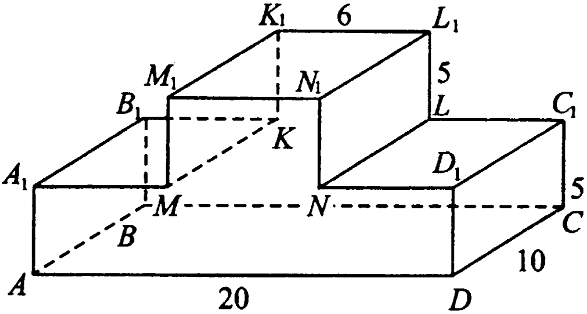


Рис. 96

10. По условию $R_1 = 60$ Ом, $R \geqslant 24$ Ом, $R = \dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$.

$\dfrac{60R_2}{60 + R_2} \geqslant 24$. $5R_2 \geqslant 120 + 2R_2$, $3R_2 \geqslant 120$, $R_2 \geqslant 40$. Наименьшее возможное сопротивление обогревателя равно 40 м.

Ответ: 40.

11. Пусть x л воды в минуту пропускает первая труба, $(x - 4)$ л воды в минуту пропускает вторая труба. За $\dfrac{320}{x}$ мин первая труба заполнит резервуар объёмом 320 л, за $\dfrac{360}{x-4}$ мин вторая заполнит резервуар в 360 л.

$\dfrac{360}{x-4} - \dfrac{320}{x} = 10$, $\dfrac{36}{x-4} - \dfrac{32}{x} = 1$,

$x^2 - 4x = 36x - 32x + 128$,

$x^2 - 8x - 128 = 0$

$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 + 128} = 4 \pm 12$.

$x_1 = 16, x_2 = -8 < 0$.

Значит, первая труба пропускает 16 л в минуту.

Ответ: 16.

12. Функция $y = 5x^2 - 9x + 2\ln x - 24$ определена при $x > 0$ и дифференцируема на области определения (см. рис. 97).

$$y' = 10x - 9 + \frac{2}{x} = \frac{10x^2 - 9x + 2}{x} = \frac{10\left(x - \frac{2}{5}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{x}.$$

$\dfrac{1}{2}$ — точка минимума.

Ответ: 0,5.

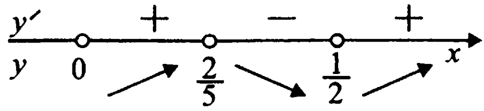


Рис. 97

13. а) ОДЗ уравнения является множеством всех таких x, что $\sin x \neq 0$, то есть $x \neq \pi k$ $(k \in Z)$.

Преобразуем уравнение, пользуясь формулой $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$:

$\cos^3 x - \dfrac{\cos^2 x}{2\sin x} = 0,$

$\dfrac{2\sin x\cos^3 x - \cos^2 x}{2\sin x} = 0,$

$\dfrac{\cos^2 x(2\sin x\cos x - 1)}{2\sin x} = 0.$

В ОДЗ получим уравнение:
$\cos^2 x(2\sin x\cos x - 1) = 0.$

Так как $2\sin x\cos x = \sin 2x$, то получим уравнение
$\cos^2 x(\sin 2x - 1) = 0.$

1) $\cos^2 x = 0$; $\cos x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi m, m \in Z.$

2) $\sin 2x = 1$, $2x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z.$

Ни одно из найденных значений x не совпадает с πk, $k \in Z$. Поэтому получаем следующие решения уравнения:

$\dfrac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in Z$, $\dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

б) Для отыскания корней, принадлежащих указанному промежутку, решаем неравенства:

$-\pi \leqslant \dfrac{\pi}{2} + \pi m \leqslant -\dfrac{\pi}{2},$

$-\dfrac{3}{2} \leqslant m \leqslant -1$, $m \in Z,$

$m = -1$, $x = -\dfrac{\pi}{2};$

$-\pi \leqslant \dfrac{\pi}{4} + \pi n \leqslant -\dfrac{\pi}{2},$

$-\frac{5}{4} \leqslant n \leqslant -\frac{3}{4}, \ n \in Z,$

$n = -1, \ x = -\frac{3\pi}{4}.$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi m, \ \frac{\pi}{4} + \pi n, \ m, n \in Z$; б) $-\frac{3\pi}{4}, \ -\frac{\pi}{2}$.

14. а) Рассмотрим рисунок 98.

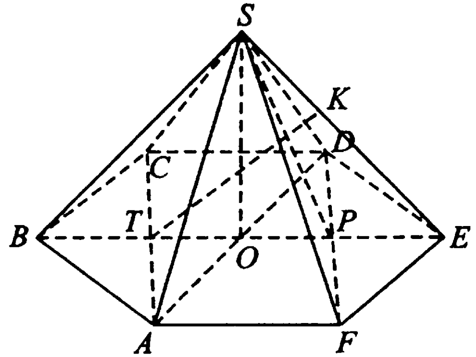


Рис. 98

Из условия вытекает, что высота пирамиды проектируется в точку пересечения бóльших диагоналей основания.

Сечение проходит через диагональ AC и пересекает плоскость BSE по прямой TK, где T — точка пересечения BE и AC, а K — точка пересечения с ребром SE.

SO лежит в плоскости BSE и по условию $\angle SEO = 60°$.

Проекция TK на плоскость основания принадлежит плоскости BSE и лежит на диагонали BE.

По свойству правильного шестиугольника $TE \perp AC$. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах $TK \perp AC$.

Итак, $AC \perp BSE$, значит, $AC \perp SE$.

По условию O является центром окружности, описанной около правильного шестиугольника. Радиус этой окружности равен стороне шестиугольника, значит, равен 6. Поэтому $BE = 2 \cdot BO = 2 \cdot 6 = 12$. Точка T является точкой пересечения диагоналей ромба $OABC$, поэтому $BT = OT = OP = PE = 3$.

Обозначим через Q точку пересечения TK и SO (см. рис. 99).

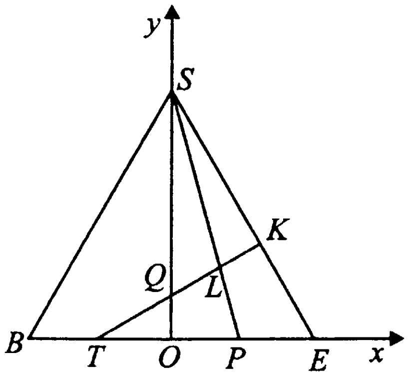


Рис. 99

По условию зададим $QO = \sqrt{3}$, но $OT = 3$. Значит, $\operatorname{tg}\angle QTO = \frac{\sqrt{3}}{3}$, поэтому $\angle QTO = 30°$.

По условию $\angle KEO = 60°$, тогда $\angle TKE = 90°$, следовательно, $TK \perp SE$. Получаем, что SE перпендикулярна двум прямым AC и KT, лежащим в сечении. Поэтому SE перпендикулярно сечению.

б) На рисунке 98 точка P является пересечением DF и BE, поэтому SP принадлежит BSE и P делит OE пополам.

Обозначим на рисунке 99 через L точку пересечения TK и SP.

По условию $\angle B = \angle E = 60°$, значит, $\angle BSE = 60°$. Поэтому $BS = SE = BE = 12$, $SO = 12 \cdot \cos 30° = 6\sqrt{3}$.

Рассмотрим систему координат, где OS соответствует оси OY, OE соответствует оси Ox.

Найдём координаты точки L как точки пересечения прямых TK и SP.

Уравнение TK: $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \sqrt{3}$, так как $\angle KTE = 30°$ и $OQ = \sqrt{3}$.

Уравнение SP: $y = \frac{-6\sqrt{3}}{3}x + 6\sqrt{3}$, так как $OS = 6\sqrt{3}$ и $OP = 3$,

тогда $y = -2\sqrt{3}x + 6\sqrt{3}$, отсюда $\frac{1}{\sqrt{3}}x + \sqrt{3} = -2\sqrt{3}x + 6\sqrt{3}$,

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+2\sqrt{3}\right)x=5\sqrt{3},\ \frac{7}{\sqrt{3}}x=5\sqrt{3}, x=\frac{15}{7};$

$y=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{15}{7}+\sqrt{3}=\frac{12\sqrt{3}}{7}$, поэтому $L\left(\frac{15}{7};\frac{12\sqrt{3}}{7}\right)$.

В треугольнике SDF через точку L проведём прямую, параллельную AC. Именно по этой прямой сечение пересекает плоскость SDF. Точки пересечения её с рёбрами SD и SF обозначим соответственно M и N (см. рис. 100).

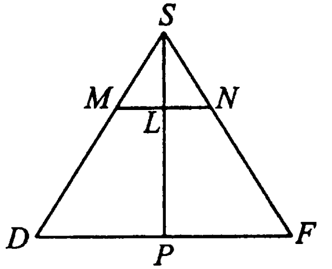


Рис. 100

Заметим, что $DF=\sqrt{6^2+6^2-2\cdot 6\cdot 6\cdot\cos 120^\circ}=\sqrt{72+36}=$ $=\sqrt{108}=6\sqrt{3}$ (из $\triangle DEF$ по теореме косинусов).

$SP=\sqrt{SO^2+OP^2}=\sqrt{(6\sqrt{3})^2+3^2}=\sqrt{117}=3\sqrt{13}.$

Из рисунка 100 получаем:

$$\frac{MN}{DF}=\frac{SL}{SP},\quad \frac{MN}{6\sqrt{3}}=\frac{SL}{3\sqrt{13}},\quad MN=\frac{6\sqrt{3}\cdot SL}{3\sqrt{13}}.$$

Так как $S(0;6\sqrt{3})$, $L\left(\frac{15}{7},\frac{12}{7}\sqrt{3}\right)$, то $SL=\sqrt{\left(\frac{15}{7}\right)^2+\left(\frac{30\sqrt{3}}{7}\right)^2}=$

$=\frac{\sqrt{225+2\,700}}{7}=\frac{\sqrt{2\,925}}{7}=\frac{15\sqrt{13}}{7},$

$MN=\frac{6\sqrt{3}\cdot 15\sqrt{13}}{7\cdot 3\sqrt{13}}=\frac{30\sqrt{3}}{7}.$

Заметим, что сечением будет пятиугольник $ANKMC$ (см. рис. 101), где $AC \parallel MN$ И $KT\perp AC$.

$$S_{ANKMC}=\frac{1}{2}(AC+MN)\cdot TL+\frac{1}{2}MN\cdot KL.$$

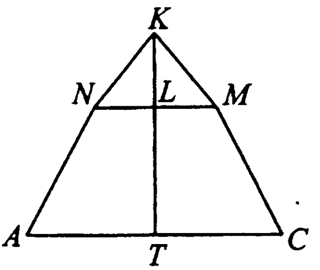


Рис. 101

Согласно рисунку 99, $TK = TE \cdot \cos \angle KTE = 9 \cdot \cos 30^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

$T(-3; 0), L\left(\frac{15}{7}; \frac{12\sqrt{3}}{7}\right)$.

$$TL = \sqrt{\left(\frac{15}{7} + 3\right)^2 + \left(\frac{12\sqrt{3}}{7}\right)^2} = \frac{1}{7}\sqrt{1\,296 + 432} = \frac{1}{7}\sqrt{1\,728} = \frac{24\sqrt{3}}{7}.$$

$$LK = TK - TL = \frac{9\sqrt{3}}{2} - \frac{24\sqrt{3}}{7} = \frac{63\sqrt{3} - 48\sqrt{3}}{14} = \frac{15\sqrt{3}}{14}.$$

Отметим ещё, что $AC = DF = 6\sqrt{3}$, поэтому

$$S = \frac{1}{2}\left(6\sqrt{3} + \frac{30\sqrt{3}}{7}\right) \cdot \frac{24\sqrt{3}}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{30\sqrt{3}}{7} \cdot \frac{15\sqrt{3}}{14} = \frac{3}{2}\left(\frac{72 \cdot 24}{49} + \frac{30 \cdot 15}{98}\right) =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{279}{7} = \frac{837}{14} = 59\frac{11}{14}.$$

Ответ: $59\frac{11}{14}$.

15. Сделаем замену $5^x = t$, получим неравенство $\frac{t+1}{5t^2 - 26t + 5} \geqslant -\frac{1}{11}$,

$$\frac{t+1}{5t^2 - 26t + 5} + \frac{1}{11} \geqslant 0,$$

$$\frac{11t + 11 + 5t^2 - 26t + 5}{11(5t^2 - 26t + 5)} \geqslant 0,$$

$$\frac{5t^2 - 15t + 16}{5t^2 - 26t + 5} \geqslant 0, \qquad (*)$$

Так как дискриминант квадратного трёхчлена $5t^2 - 15t + 16$ меньше нуля, то $t^2 - 15t + 16 > 0$ при любом t.

Поэтому неравенство (*) равносильно неравенству $5t^2 - 26t + 5 > 0$, $5(t-5)\left(t-\frac{1}{5}\right) > 0$, $t < \frac{1}{5}$ или $t > 5$.

Сделаем обратную замену, получим:

1) $5^x < \frac{1}{5}$, $5^x < 5^{-1}$, $x < -1$;

2) $5^x > 5$, $5^x > 5^1$, $x > 1$.

Ответ: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

16. а) Проведём через точки касания большей и меньших окружностей диаметры большей окружности. Получим две взаимно перпендикулярные прямые, проходящие через центр O большей окружности, так как дуга l между точками касания равна 90°, а значит, и центральный угол, опирающийся на неё, равен 90°.

При этом центры малых окружностей принадлежат указанным диаметрам. Рассмотрим рисунок 102, где O_1 и O_2 — центры малых окружностей.

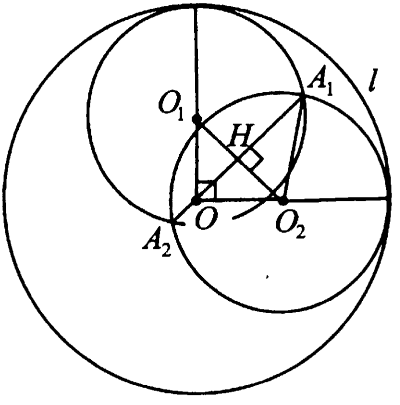


Рис. 102

Тогда $OO_1 = OO_2 = 1 + \sqrt{2} - \frac{5}{4} = \sqrt{2} - \frac{1}{4}$. По теореме Пифагора $O_1O_2 = \sqrt{OO_1^2 + OO_2^2} = OO_1\sqrt{2} = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{4}\right)\sqrt{2} = 2 - \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Так как сумма радиусов малых окружностей (с одинаковыми радиусами), равная $\frac{5}{4}+\frac{5}{4}=\frac{5}{2}$, больше расстояния между их центрами $O_1O_2 = 2-\frac{\sqrt{2}}{4}$, то эти окружности пересекаются в двух точках A_1 и A_2.

б) Так как линия центров двух пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде и делит её пополам, то $\angle A_1HO_2 = 90°$ и $A_1H = HA_2$. Кроме того, $O_1H = HO_2$, так как A_1H — высота и, следовательно, медиана в равнобедренном треугольнике $O_1A_1O_2$. По теореме Пифагора $A_1H = \sqrt{A_1O_2^2 - O_2H^2} = \sqrt{A_1O_2^2 - \left(\frac{O_1O_2}{2}\right)^2} =$

$$= \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{1}{4}\left(2-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{1}{4}\cdot\frac{(8-\sqrt{2})^2}{4^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{100-64+16\sqrt{2}-2}{64}} = \frac{1}{8}\sqrt{34+16\sqrt{2}}.$$

Тогда $(A_1A_2)^2 = (2A_1H)^2 = \left(\frac{1}{4}\sqrt{34+16\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{34+16\sqrt{2}}{16} =$
$= \frac{17}{8}+\sqrt{2}.$

Ответ: $\frac{17}{8}+\sqrt{2}$.

17. По условию за 9 месяцев долг должен уменьшиться от 5 млн рублей до 0. При этом каждый месяц долг уменьшается на одно и то же число рублей. Значит, последовательность долгов на 15-е число каждого месяца будет следующей: $5, \frac{8}{9}\cdot 5, \frac{7}{9}\cdot 5, \ldots \frac{2}{9}\cdot 5, \frac{1}{9}\cdot 5, 0.$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 2,5%, тогда последовательность размеров долга на 1-е число каждого месяца такова:

$5\cdot 1{,}025;\ \frac{8}{9}\cdot 5\cdot 1{,}025;\ \frac{7}{9}\cdot 5\cdot 1{,}025; \ldots;\ \frac{2}{9}\cdot 5\cdot 1{,}025;\ \frac{1}{9}\cdot 5\cdot 1{,}025.$

Всего надо будет выплатить:

$5 + 5\cdot 0{,}025 + \frac{8}{9}\cdot 5\cdot 0{,}025 + \frac{7}{9}\cdot 5\cdot 0{,}025 + \ldots + \frac{2}{9}\cdot 5\cdot 0{,}025+$

$+\frac{1}{9}\cdot 5\cdot 0{,}025 = 5+5\cdot 0{,}025\left(1+\frac{8}{9}+\frac{7}{9}+\ldots+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\right) = 5+5\cdot 0{,}025\cdot\frac{10\cdot 9}{9\cdot 2} =$
$= 5 + 5\cdot 0{,}025\cdot 5 = 5 + 25\cdot 0{,}025 = 5{,}625$ (млн рублей).

$5{,}625 - 5 = 0{,}625$.

Ответ: 0,625.

18. Преобразуем первое уравнение системы, полагая $x^2 = t$:

$t^2 - (2\sqrt{2}x - y^2 + 2\sqrt{2}y - y^2)t + (2\sqrt{2}x - y^2)(2\sqrt{2}y - y^2) = 0,$

$(t - (2\sqrt{2}x - y^2))(t - (2\sqrt{2}y - y^2)) = 0.$

Сделаем обратную замену, получим

$(x^2 - 2\sqrt{2}x + y^2)(x^2 - 2\sqrt{2}y + y^2) = 0$

$((x - \sqrt{2})^2 + y^2 - 2)(x^2 + (y - \sqrt{2})^2 - 2) = 0.$

Уравнение равносильно совокупности

$\left[\begin{array}{l}(x - \sqrt{2})^2 + y^2 - 2 = 0,\\ x^2 + (y - \sqrt{2})^2 - 2 = 0;\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}(x - \sqrt{2})^2 + y^2 = 2,\\ x^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 2;\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}(x - \sqrt{2})^2 + y^2 = (\sqrt{2})^2,\\ x^2 + (y - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{2})^2.\end{array}\right.$

Первое уравнение является уравнением окружности с центром в точке $O_1(\sqrt{2}; 0)$ и радиусом $\sqrt{2}$, а второе уравнение является уравнением окружности с центром в точке $O_2(0; \sqrt{2})$ и радиусом $\sqrt{2}$.

Множеством решений совокупности будет множество точек, являющихся объединением точек, лежащих на указанных окружностях.

Заметим, что упомянутые окружности пересекаются в двух точках $(0, 0)$ и $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Найдём теперь все значения a, при которых прямая $y = -x + a$ касается обеих окружностей и проходит через общие точки (см. рис. 103).

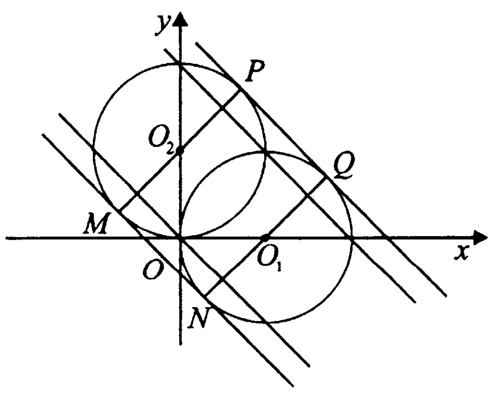


Рис. 103

Уравнения прямых, которые проходят через общие точки: $y = -x$, $y = -x + 2\sqrt{2}$.

Пусть M, N, P и Q — точки касания прямой $y = -x + a$ и указанных окружностей.

M является точкой пересечения прямых $y = -x + a$ и $y = x + \sqrt{2}$ (так как O_2M — радиус, перпендикулярный прямой $y = -x + a$).

Отсюда $-x + a = x + \sqrt{2}$, $2x = a - \sqrt{2}$, $x = \dfrac{a-\sqrt{2}}{2}$.

$$y = x + \sqrt{2} = \frac{a-\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} = \frac{a+\sqrt{2}}{2},$$

$$y - \sqrt{2} = \frac{a+\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} = \frac{a-\sqrt{2}}{2}.$$

Так как M лежит на окружности $x^2 + (y-\sqrt{2})^2 = 2$, то

$$\left(\frac{a-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2,$$

$$\left(\frac{a-\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1,$$

$$\frac{a-\sqrt{2}}{2} = \pm 1,$$

$$a - \sqrt{2} = \pm 2,$$
$$a_1 = 2 + \sqrt{2},$$
$$a_2 = -2 + \sqrt{2}.$$

В соответствии с рисунком 103 делаем вывод, что уравнение прямой MN: $y = -x + \sqrt{2} - 2$, а уравнение прямой PQ: $y = -x + \sqrt{2} + 2$.

Таким образом, искомыми значениями a являются $-2 + \sqrt{2} < a < 0$, $0 < a < 2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2} < a < 2 + \sqrt{2}$.

Ответ: $(-2+\sqrt{2}; 0) \cup (0; 2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; 2+\sqrt{2})$.

19. а) Да. Например, пусть три участника набрали 257, 129 и 9 очков.

Тогда первоначальное среднее число очков у тех, кто не набрал 128 очков, равно 9. После снятия очков получаем набранные очки: 253, 125 и 5.

Среднее число очков у тех, кто не набрал 128 очков, равно $\dfrac{125+5}{2} = 65$; $65 > 5$.

б) Да, это возможно. При тех же условиях, что и в пункте а), получаем, что среднее число очков у тех, кто набрал не менее 128 очков, было равно $\dfrac{257+129}{2} = 193$.

После снятия очков получаем среднее число очков у тех, у кого их осталось не менее 128, равно 253, $253 > 193$.

в) Пусть N — общее число участников соревнований, a — число участников, которые первоначально набрали не менее 128 очков.

Тогда по условию получаем:

$120N = 132a + 118(N - a)$

$2N = 14a,$

$N = 7a$, N делится на 7.

После снятия пусть b — число участников, у которых осталось не менее 128 очков.

Тогда по условию получаем:

$116N = 128b + 114(N - b),$

$2N = 14b,$

$N = 7b$, N делится на 7.

Таким образом, $N \geqslant 7$.

Покажем, что при $N = 7$ могут выполняться все условия, указанные в пункте в).

Действительно, пусть семь участников первоначально набрали очки так: 1 — 132, 1 — 124, 3 по 122, 2 по 109.

Тогда первоначальное среднее число очков, набранных всеми участниками, равно $\frac{132 + 124 + 366 + 218}{7} = \frac{840}{7} = 120$. Среднее число очков у тех, кто набрал не менее 128 очков, равно 132, среднее число очков у тех, кто набрал менее 128 очков, равно

$$\frac{124 + 3 \cdot 122 + 2 \cdot 109}{6} = \frac{124 + 366 + 218}{6} = \frac{708}{6} = 118.$$

После снятия получаем набранные очки: 1 — 128, 1 — 120, 3 по 118, 2 по 105.

Тогда среднее число очков у тех, у кого осталось не менее 128, равно 128, среднее число очков у тех, у кого осталось менее 128, равно

$$\frac{120 + 3 \cdot 118 + 2 \cdot 105}{6} = \frac{120 + 354 + 210}{6} = \frac{684}{6} = 114.$$

Ответ: а) да; б) да; в) 7.

Решение варианта № 22

1. Поезд отправляется в 18 ч 15 мин, а прибывает в 8 ч 15 мин следующего дня, то есть до 24 часов он находится в пути.

24 ч 00 мин − 18 ч 15 мин = 23 ч 60 мин − 18 ч 15 мин = 5 ч 45 мин.
Затем надо сложить 5 ч 45 мин с 8 ч 15 мин, получим:

5 ч 45 мин + 8 ч 15 мин = 14 ч 00 мин.

Итак, в пути поезд находился 14 часов.

Ответ: 14.

2. Используя диаграмму, определяем, что магазин «Письмо» занимал пятое место.

Ответ: 5.

3. Площадь указанного четырёхугольника можно вычислить следующим образом: $S_{OCKE} = S_{ABCD} - (S_{BOC} + S_{CKM} + S_{KMDE} + S_{EOA})$ (см. рис. 104).

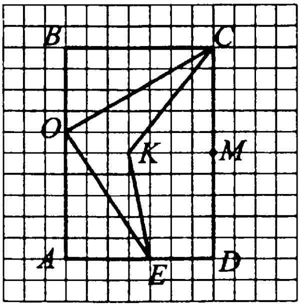


Рис. 104

$$S_{ABCD} = 7 \cdot 10 = 70;\ S_{BOC} = \frac{4 \cdot 7}{2} = 14;\ S_{CKM} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10;$$

$$S_{KMDE} = \frac{ED + KM}{2} \cdot MD = \frac{3+4}{2} \cdot 5 = \frac{35}{2} = 17{,}5;\ S_{EOA} = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12.$$

Тогда $S_{OCKE} = 70 - (14 + 10 + 17{,}5 + 12) = 70 - 53{,}5 = 16{,}5$.

Ответ: 16,5.

4. Частота рождения девочек — это отношение числа рождений девочек к общему числу появившихся на свет младенцев, то есть

$$\frac{30\,000 - 16\,800}{30\,000} = \frac{13\,200}{30\,000} = 0{,}44.$$

Ответ: 0,44.

5. $\log_{25}(x^2 + 6x) = \log_{25}(x^2 + 126)$; $x^2 + 6x = x^2 + 126$; $6x = 126$; $x = 21$. Это значение x удовлетворяет ОДЗ, так как $21^2 + 6 \cdot 21 > 0$.

Ответ: 21.

14. Зак. № 82

6. Обозначим через S площадь параллелограмма (см. рис. 105). Тогда $S = AB \cdot DH = BC \cdot DG$. Отсюда $DG = \dfrac{AB \cdot DH}{BC} = \dfrac{8 \cdot 10}{16} = 5$.

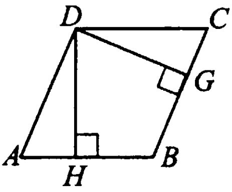


Рис. 105

Ответ: 5.

7. Скорость материальной точки равна значению производной пройденного пути по времени $v(t) = x'(t) = 2t - 9$. Так как $v(t) = 3$, то $2t - 9 = 3$; $2t = 12$; $t = 6$ (с).

Ответ: 6.

8. $V_{\text{цил}} = \pi R^2 h$, где R — радиус основания цилиндра, h — его высота. Так как $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, где a — сторона правильного треугольника, лежащего в основании призмы, то $R = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$. По условию, $h = \dfrac{12}{\pi}$. Следовательно, $V_{\text{цил}} = \pi \dfrac{49 \cdot 3}{9} \cdot \dfrac{12}{\pi} = 196$.

Ответ: 196.

9. $\left((9x - 8y)^2 - (9x + 8y)^2\right) : 12xy =$
$= \left((9x - 8y) - (9x + 8y)\right)\left((9x - 8y) + (9x + 8y)\right) : 12xy =$
$= (-16y \cdot 18x) : 12xy = -\dfrac{16 \cdot 18}{12} = -24$.

Ответ: -24.

10. $\dfrac{1}{d_1} + \dfrac{1}{d_2} = \dfrac{1}{f}$; $\dfrac{1}{d_1} = \dfrac{1}{f} - \dfrac{1}{d_2}$;
$d_1 = \dfrac{f \cdot d_2}{d_2 - f} = \dfrac{f(d_2 - f + f)}{d_2 - f} = f + \dfrac{f^2}{d_2 - f}$.

Видно, что d_1 — наименьшее, если d_2 — наибольшее (f постоянно). Найдём наименьшее d_1.

$d_1 = \dfrac{80 \cdot 400}{400 - 80} = 100\,(\text{см})$.

Ответ: 100.

11. Обозначим через x количество дней, которое понадобилось первому маляру, чтобы выполнить всю работу по покраске стен. Тогда $\dfrac{1}{x}$ — производительность труда первого маляра, $\dfrac{1}{12}$ — производительность труда второго маляра, а общая их производительность равна $\dfrac{1}{8}$. Составим и решим уравнение:

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{8}$; $96 + 8x = 12x$; $4x = 96$; $x = 24$.

Ответ: 24.

12. $y' = \big(\ln(18x) - 18x + 29\big)' = \dfrac{(18x)'}{18x} - 18 = \dfrac{1}{x} - 18$. $y' = 0$ при $x = \dfrac{1}{18}$, $\dfrac{1}{18} \in \left[\dfrac{1}{25}; \dfrac{2}{3}\right]$.

При $x < \dfrac{1}{18}$, $y' > 0$, а при $x > \dfrac{1}{18}$, $y' < 0$. Значит, точка $x = \dfrac{1}{18}$ является точкой максимума. Так как функция $y(x)$ дифференцируема на отрезке $\left[\dfrac{1}{25}; \dfrac{2}{3}\right]$ и имеет на нём единственную критическую точку, которая является точкой максимума, то в ней достигается наибольшее значение. Тогда $y_{\text{наиб}} = y\left(\dfrac{1}{18}\right) = \ln\left(18 \cdot \dfrac{1}{18}\right) - 18 \cdot \dfrac{1}{18} + 29 = 28$.

Ответ: 28.

13. а) Преобразуем уравнение:

$1 - 2\sin^2 x = -\sin x$; $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$; $(2\sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$, откуда $\sin x = 1$ или $\sin x = -\dfrac{1}{2}$.

Из уравнения $\sin x = 1$ находим: $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in Z$.

Из уравнения $\sin x = -\dfrac{1}{2}$ находим: $x = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi n$, где $n \in Z$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right)$ (см. рис. 106).

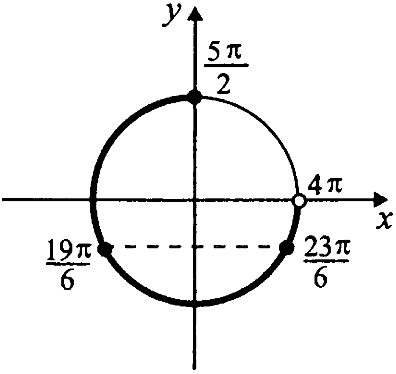


Рис. 106

Получаем числа: $\frac{5\pi}{2}; \frac{19\pi}{6}; \frac{23\pi}{6}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$; б) $\frac{5\pi}{2}, \frac{19\pi}{6}, \frac{23\pi}{6}$.

14. а) Рассмотрим рисунок 107.

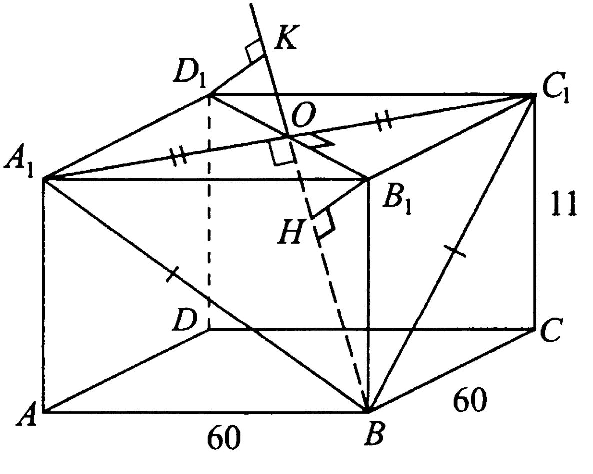


Рис. 107

$AA_1 = CC_1 = 11$, по теореме Пифагора $A_1B^2 = AA_1^2 + AB^2$, $C_1B^2 = CC_1^2 + BC^2$, $A_1C_1^2 = A_1B_1^2 + B_1C_1^2$

Получаем $A_1C_1 = \sqrt{60^2 + 60^2} = 60\sqrt{2}$;
$A_1B = C_1B = \sqrt{60^2 + 11^2} = 61$.

$\triangle A_1C_1B$ равнобедренный.

Проведём $BO \perp A_1C_1$. O — середина A_1C_1. В квадрате $A_1B_1C_1D_1$ диагонали перпендикулярны и равны, поэтому точка O — точка пересечения диагоналей.

$A_1O = OC_1 = B_1O = OD_1 = A_1C_1 : 2 = 30\sqrt{2}$.

Проведём $B_1H \perp OB$ и $D_1K \perp OB$. $\triangle D_1KO = \triangle B_1HO$ по гипотенузе и острому углу ($\angle KOD_1 = \angle HOB_1$ как вертикальные), отсюда $D_1K = B_1H$.

Докажем, что B_1H — расстояние от B_1 до плоскости A_1C_1B. Для этого необходимо указать две прямые в плоскости A_1C_1B, перпендикулярные B_1H.

$OB \perp B_1H$ по построению. $A_1C_1 \perp B_1O$ и $A_1C_1 \perp OB$, значит, $A_1C_1 \perp (OB_1B)$ и A_1C_1 перпендикулярна любой прямой, лежащей в данной плоскости. $B_1H \perp A_1C_1 \Rightarrow B_1H \perp (A_1C_1B)$. Аналогично $D_1K \perp (A_1C_1B)$, значит, D_1K — расстояние от D_1 до плоскости A_1C_1B. Мы получили ранее, что $D_1K = B_1H$.

б) В $\triangle OB_1B$ высоту B_1H найдём, выражая площадь треугольника двумя способами. $S_{OB_1B} = \frac{1}{2}OB \cdot B_1H = \frac{1}{2}OB_1 \cdot BB_1$, тогда

$$B_1H = \frac{OB_1 \cdot BB_1}{OB} = \frac{OB_1 \cdot BB_1}{\sqrt{OB_1^2 + BB_1^2}} = \frac{30\sqrt{2} \cdot 11}{\sqrt{1921}} = \frac{330\sqrt{2}}{\sqrt{1921}}.$$

Ответ: $\frac{330\sqrt{2}}{\sqrt{1921}}$.

15. Преобразуем неравенство на ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 25$.

$$\log_5 125 + \log_5 x^2 - \frac{3}{\log_5 5 - \log_5 x + 1} \leqslant 0;$$

$$3 + 2\log_5 x - \frac{3}{2 - \log_5 x} \leqslant 0.$$

Обозначим $\log_5 x = t$.

Получим неравенство $3 + 2t - \frac{3}{2 - t} \leqslant 0$.

$$3 + 2t + \frac{3}{t - 2} \leqslant 0.$$

$$\frac{3t-6+2t(t-2)+3}{t-2} \leqslant 0; \ \frac{2t^2-t-3}{t-2} \leqslant 0; \ \frac{(t+1)(t-\frac{3}{2})}{t-2} \leqslant 0.$$

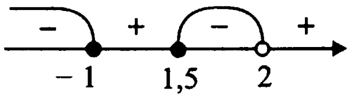


Рис. 108

Значит, $t \leqslant -1$ или $1{,}5 \leqslant t < 2$ (см. рис. 108).

Возвращаясь к x, получаем $\log_5 x \leqslant -1; 0 < x \leqslant \frac{1}{5}$;

$1{,}5 \leqslant \log_5 x < 2; 5^{\frac{3}{2}} \leqslant x < 5^2; 5\sqrt{5} \leqslant x < 25.$

Ответ: $\left(0; \frac{1}{5}\right] \cup [5\sqrt{5}; 25)$.

16. а) Рассмотрим рисунок 109. $BE : EC = 2 : 3$, обозначим $BE = 2y$, $EC = 3y$. По свойству биссектрисы в $\triangle ABC$
$AB : AC = BE : EC = 2 : 3$.

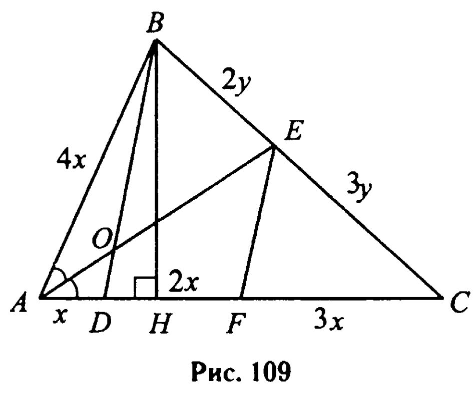


Рис. 109

По условию $AD : DF : FC = 1 : 2 : 3$, пусть $AD = x$, $DF = 2x$, $FC = 3x$, тогда $AC = x + 2x + 3x = 6x$.

$AB : AC = 2 : 3$, $AB = 6x \cdot 2 : 3 = 4x$. Получим $AB = 4AD$.

б) Пусть $S_{ABC} = S$. AE — биссектриса, $\angle BAO = \angle OAD = \alpha$.

$$S_{ABO} = \frac{1}{2} AO \cdot AB \cdot \sin\alpha = \frac{4x \cdot AO \cdot \sin\alpha}{2},$$

$$S_{ADO} = \frac{1}{2} AO \cdot AD \cdot \sin\alpha = \frac{AO \cdot x \cdot \sin\alpha}{2}, \ \frac{S_{ABO}}{S_{ADO}} = 4, \ \frac{S_{ABO}}{S_{ABD}} = \frac{4}{5}.$$

Проведём BH — высоту $\triangle ABD$. Она также является высотой $\triangle ABC$ и $\triangle BDC$. $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 6x \cdot BH = 3x \cdot BH = S$.

$S_{ABD} = \frac{1}{2}x \cdot BH = \frac{1}{6}S$, $S_{BDC} = \frac{1}{2}DC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 5x \cdot BH = \frac{5}{6}S$.

$\triangle BDC \sim \triangle EFC$ по двум углам ($\angle C$ общий, $\angle BDC = \angle EFC$ как соответственные при $BD \parallel EF$ и секущей AC).

$EC : BC = 3y : 5y = 0{,}6$, значит, $S_{EFC} : S_{BDC} = (0{,}6)^2 = 0{,}36$.

$S_{DBEF} = S_{BDC} - S_{EFC} = S_{BDC} - 0{,}36S_{BDC} = 0{,}64S_{BDC} = 0{,}64 \cdot \frac{5}{6}S = = \frac{3{,}2S}{6}$.

$S_{ABO} = \frac{4}{5}S_{ABD} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{6}S = \frac{0{,}8}{6}S$.

Тогда $\frac{S_{DBEF}}{S_{ABO}} = \frac{3{,}2}{0{,}8} = 4$, $S_{DBEF} = 4 \cdot 35 = 140$.

Ответ: 140.

17. По условию задачи составим таблицу.

Срок вклада	1 мес.	2 мес.	3 мес.	4 мес.	5 мес.	6 мес.
Ставка в % за месяц	$\frac{6\%}{12} = 0{,}5\%$	0,5%	$\frac{18\%}{12} = 1{,}5\%$	1,5%	1%	1%

За первый месяц банк на сумму 100% от начального вклада начислит 0,5%, и вклад увеличится на $100\% \cdot 0{,}005 = 0{,}5\%$. За второй месяц банк на сумму 110% от начального вклада начислит также 0,5%, что составит $110\% \cdot 0{,}005 = 0{,}55\%$.

В третьем месяце начисления по вкладу составят 1,5% от 120%, то есть $120\% \cdot 0{,}015 = 1{,}8\%$, в четвёртом — $130\% \cdot 0{,}015 = 1{,}95\%$, в пятом — $140\% \cdot 0{,}01 = 1{,}4\%$ и в шестом — $150\% \cdot 0{,}01 = 1{,}5\%$.

Всего банк начислил $0{,}5\%+0{,}55\%+1{,}8\%+1{,}95\%+1{,}4\%+1{,}5\% = 7{,}7\%$.

Ответ: 7,7.

18. Преобразуем уравнения.

$\log_7(x + y + 7) = \log_7 7$, $x + y + 7 = 7$, $x = -y$.

При $t = x^2 + y^2 - 4x + 4$ второе уравнение примет вид $at^2 + (6a^2 - 3a - 2)t - 12a + 6 = 0$.

При $a = 0$ получим $t = 3$, система имеет два решения, так как $2x^2 - 4x + 4 = 3$ имеет 2 корня.
Если $a \neq 0$, $D = (6a^2 - 3a - 2)^2 - 4a(-12a + 6) =$
$= (36a^4 + 9a^2 + 4 - 36a^3 + 12a - 24a^2) + 48a^2 - 24a =$
$= 36a^4 + 9a^2 + 4 - 36a^3 - 12a + 24a^2 = (6a^2 - 3a + 2)^2$.

$$t_1 = \frac{-6a^2 + 3a + 2 + 6a^2 - 3a + 2}{2a} = \frac{2}{a},$$

$$t_2 = \frac{-6a^2 + 3a + 2 - 6a^2 + 3a - 2}{2a} = -6a + 3.$$

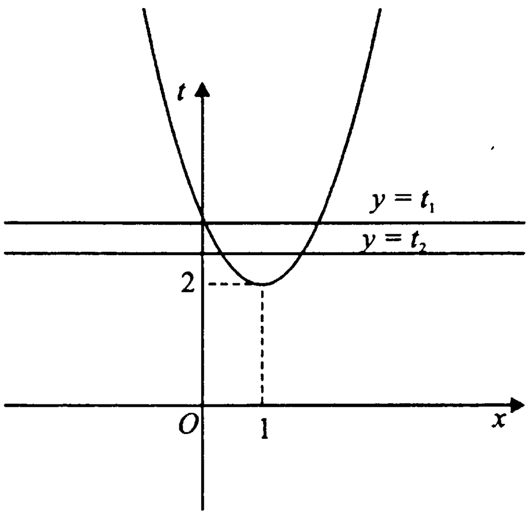


Рис. 110

При условии, что $x = -y$, получим $2x^2 - 4x + 4 = t_1$ или $2x^2 - 4x + 4 = t_2$.

Построим график $t = 2x^2 - 4x + 4$. Вершина параболы $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, ветви вверх. $t = t_1$ и $t = t_2$ — горизонтальные прямые (см. рис. 110).

Пусть $t_1 = t_2$, $\dfrac{2}{a} = -6a + 3$, $6a^2 - 3a + 2 = 0$, таких a нет. Значит, не менее трёх общих точек у параболы и прямых будет, если оба числа t_1 и t_2 больше 2, или если одно из них равно 2, а другое больше 2.

Выясним, когда $t_1 \geqslant 2$ или $t_2 \geqslant 2$.

$-6a + 3 \geqslant 2$, $-6a \geqslant -1$, $a \leqslant \dfrac{1}{6}$.

$t_2 \geqslant 2,\ \dfrac{2}{a} \geqslant 2,\ \dfrac{1}{a} - 1 \geqslant 0,\ \dfrac{1-a}{a} \geqslant 0;\ 0 < a \leqslant 1.$

Не менее 3 решений система имеет при $0 < a \leqslant \frac{1}{6}$ (см. рис. 111).

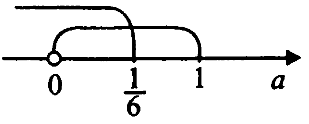


Рис. 111

Ответ: $\left(0; \frac{1}{6}\right]$.

19. а) Да, пусть рейтинги сотрудников отдела А были: 4, 4, 4, 8, рейтинги сотрудников отдела Б были: 9, 9, 9, 9. Из отдела А в отдел Б перешёл человек с рейтингом 8. Рейтинг отдела А понизился с 5 до 4, рейтинг отдела Б понизился с 9 до 8, 8.

б) Докажем, что если объединить две группы людей с рейтингами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$), то рейтинг R получившейся группы будет удовлетворять условию $R_1 < R < R_2$.

Действительно, если $Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_n$ — показатели людей из первой группы, а $Q''_1, Q''_2, \ldots, Q''_m$ — показатели людей из второй группы, то

$(n+m)R = Q'_1 + \ldots + Q'_n + Q''_1 + \ldots + Q''_m = nR_1 + mR_2$.

Так как

$R_1 < R_2$, то $R = \dfrac{n}{n+m}R_1 + \dfrac{m}{n+m}R_2 < \dfrac{n}{n+m}R_2 + \dfrac{m}{n+m}R_2 = R_2$,

и аналогично $R > R_1$. Из этого следует, что если рейтинг определённого отдела выше (соответственно, равен или ниже) рейтинга группы тех, кто перешёл в этот отдел, то после перехода он понижается (соответственно, остаётся прежним или повышается), но по прежнему остаётся выше (соответственно, равен или ниже) рейтинга группы тех, кто перешёл в этот отдел.

Аналогично, если рейтинг определённого отдела выше (соответственно, равен или ниже) рейтинга группы тех людей, кто покинул этот отдел, то после перехода он повышается (соответственно, остаётся прежним или понижается).

Предложенная ситуация возможна, только если рейтинг отдела А ниже рейтинга отдела Б, причём это же остаётся справедливым и после перехода. Но тогда, согласно доказанному в начале этого пункта утверждению, невозможно, чтобы после обратного перехода из Б в А рейтинги обоих отделов снова понизились. Поэтому ответ в пункте б) отрицательный.

в) Будем строить пример для искомого случая из следующего соображения: если в отделе А будет один участник с минимальным рейтингом (1) (его мы оставим), а все остальные с максимальным рейтингом (9) (их мы переведём в отдел Б), то рейтинг отдела А будет высоким (8,2), а после перехода уменьшится до 1. Однако при этом в отдел Б попадут только люди с рейтингом 9, и это противоречит условию, что рейтинг Б должен уменьшиться.

Поэтому приходится брать отдел А с чуть меньшим уменьшением рейтинга: отдел А с рейтингами участников 1, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9; отдел Б — все девятки. При этом рейтинг в отделе А уменьшается на 7,1.

Покажем, что большего уменьшения рейтинга добиться нельзя.

Для множества людей M будем обозначать Q_M рейтинг отдела M, $|M|$ — количество человек в группе и $S_M = |M| \cdot Q_M$ сумму рейтингов всех участников отдела. Очевидно, что для любого отдела S_M — натуральное число, а рейтинг Q_M является дробным числом от 1 до 9.

Пусть A и B — это отделы А и Б до перехода, A' и B' — отделы А и Б после перехода и P — множество перешедших.

$|A| = |B| = 10$, $|A'| = 10 - |P|$, $|B'| = 10 + |P|$ и необходимо найти максимальное значение разности $Q_A - Q_{A'}$.

$A = A' \cup P$,

$$Q_A = S_A/10 = (S_{A'} + S_P)/10 = \frac{|A'|}{10} \cdot Q_{A'} + \frac{|P|}{10} \cdot Q_P$$

Поэтому

$$Q_A - Q_{A'} = \frac{|P|}{10} \cdot Q_P - \left(1 - \frac{|A'|}{10}\right) \cdot Q_{A'} = \frac{|P|}{10} \cdot Q_P - \frac{|P|}{10} \cdot Q_{A'} =$$
$$= \frac{|P|}{10}(Q_P - Q_{A'}).$$

Перешедших было не более 9 человек, а рейтинг группы лежит от 1 до 9, поэтому $|P| \leqslant 9$, $Q_{A'} \geqslant 1$, $Q_P \leqslant 9$. Поэтому

$$Q_A - Q_{A'} = \frac{|P|}{10}(Q_P - Q_{A'}) \leqslant \frac{9}{10}(9 - 1) = 7{,}2.$$

Для того чтобы рейтинг отдела Б уменьшился, в неё должен перейти хотя бы один человек с отличным от максимального (9) рейтингом. Поэтому в отделе Р есть хотя бы один участник с рейтингом меньше 9 и, следовательно, $Q_P < 9$. Отсюда получаем строгое неравенство

$Q_A - Q_{A'} < 7{,}2$.

Дальше видим, что обязательно $|P| = 9$, иначе $|P| \leqslant 8$ и получим $Q_A - Q_{A'} < \frac{8}{10}(9-1) = 6{,}4$ — это меньше, чем в построенном примере (7,1).

Поэтому $|P| = 9$ и, следовательно, в отделе А после перехода останется ровно один участник. Значит, рейтинг $Q_{A'}$ равен рейтингу этого участника и является целым числом. А так как рейтинг отдела $Q_A = S_A/10$ является десятичной дробью с 1 ненулевой цифрой после запятой, то их разность $Q_A - Q_{A'}$ также является десятичной дробью не более чем с 1 ненулевой цифрой после запятой. Наибольшая такая дробь с условием $Q_A - Q_{A'} < 7{,}2$ — это 7,1. Значит, $Q_A - Q_{A'} \leqslant 7{,}1$ и построенный нами пример действительно наилучший.

Ответ: а) да б) нет в) 7,1.

Решение варианта № 23

1. Переведём скорость автомобиля, выраженную в километрах в час, в скорость автомобиля, выраженную в милях в час:
$42 : 1{,}6 = 26{,}25$ (миль/час).

Ответ: 26,25.

2. Используя рисунок, определяем на горизонтальной оси число 17 и находим соответствующее ему число на вертикальной оси. Это число 1.

Следовательно, 1 мм осадков выпало 17 сентября.

Ответ: 1.

3. Прямая a параллельна прямой b. Значит, их угловые коэффициенты равны и $-28 : x = -7 : 9$; $x = \frac{28 \cdot 9}{7} = 36$.

Ответ: 36.

4. Предположим, что одна девочка уже сидит за круглым столом. Тогда для второй девочки остаётся 10 свободных мест и из них 2 места (справа и слева от первой девочки) благоприятны. Тогда вероятность того, что обе девочки будут сидеть рядом, равна $\frac{2}{10} = 0{,}2$.

Ответ: 0,2.

5. $\sqrt{0{,}4 - 1{,}8x} = -x$; $0{,}4 - 1{,}8x = x^2$; $10x^2 + 18x - 4 = 0$; $x_1 = -2$, $x_2 = 0{,}2$. Проверка показывает, что $x = 0{,}2$ не является корнем исходного уравнения. Значит, $x = -2$ — единственный корень уравнения.

Ответ: -2.

6. Так как $\cos A = \dfrac{AC}{AB}$ (см. рис. 112), то $AB = \dfrac{AC}{\cos A} = \dfrac{9\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 18$.

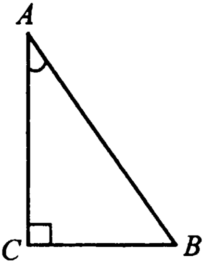


Рис. 112

Ответ: 18.

7. Если $f'(x) > 0$ на некотором промежутке, то $f(x)$ возрастает на этом промежутке. Из указанных точек точки x_1, x_2, x_5, x_6, x_9 и x_{10} принадлежат промежуткам возрастания функции. Таких точек шесть.

Ответ: 6.

8. AC_2 является диагональю параллелепипеда с измерениями $AA_2 = 12$, $A_2D_2 = 4$, $D_2C_2 = 3$.

Тогда $AC_2^2 = AA_2^2 + A_2D_2^2 + D_2C_2^2 = 12^2 + 4^2 + 3^2 = 144 + 16 + 9 = 169$, $AC_2 = 13$.

Ответ: 13.

9. $\dfrac{9(m^7)^8 + 7(m^2)^{28}}{5 \cdot (2m^{14})^4} = \dfrac{9m^{56} + 7m^{56}}{5 \cdot 2^4 \cdot m^{56}} = \dfrac{16}{5 \cdot 16} = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$.

Ответ: 0,2.

10. В формулу $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$ подставим исходные данные:

$15 = 240 \cdot 2^{-\frac{t}{4}}$; $2^{-\frac{t}{4}} = \dfrac{1}{16}$; $2^{-\frac{t}{4}} = 2^{-4}$; $-\dfrac{t}{4} = -4$; $t = 16$.

Ответ: 16.

11. Пусть x метров — длина платформы. Тогда $(600 + x)$ метров прошёл поезд мимо платформы за 45 секунд (45 сек $= \dfrac{1}{80}$ ч).

Составим и решим уравнение.

$\dfrac{600+x}{\frac{1}{80}} = 70\,000$; $80(600+x) = 70\,000$; $4800+8x = 7000$; $8x = 2200$; $x = 275$.

Ответ: 275.

12. $y' = \left(\frac{3}{5}x^5 + 8x^3 - 27x\right)' = 3x^4 + 24x^2 - 27$.

$y' = 0$; $3x^4 + 24x^2 - 27 = 0$; $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$; $x^2 = -9$ (не имеет решений) или $x^2 = 1$; $x = \pm 1$.

Находим значения функции в найденных стационарных точках и на концах отрезка:

$y(-5) = -\dfrac{3}{5}\cdot 5^5 - 8\cdot 5^3 + 27\cdot 5 = -2740$;

$y(-1) = -\dfrac{3}{5} - 8 + 27 = 18{,}4$;

$y(1) = \dfrac{3}{5} + 8 - 27 = -18{,}4$.

Наибольшее значение равно 18,4.

Ответ: 18,4.

13. а) Преобразуем уравнение:

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right) - \cos x = 0$; $\cos 2x - \cos x = 0$; $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$;

$(2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$, откуда $\cos x = 1$ или $\cos x = -\dfrac{1}{2}$.

Из уравнения $\cos x = 1$ находим: $x = 2\pi k$, где $k \in Z$.

Из уравнения $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ находим: $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k$, где $k \in Z$.

б) С помощью числовой окружности (см. рис. 113) отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\pi; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Получаем числа: $-\dfrac{2\pi}{3}$; 0.

Ответ: а) $2\pi k, \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$; б) $-\dfrac{2\pi}{3}$, 0

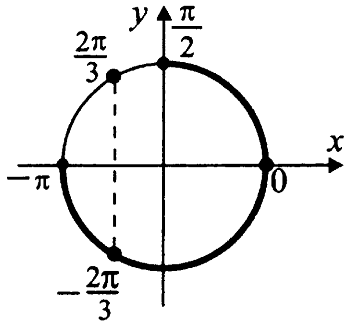


Рис. 113

14. а) Рассмотрим треугольную пирамиду D_1ACD (см. рис. 114).

В данной пирамиде расстояние от точки D до плоскости основания ACD_1 равно высоте DH пирамиды, проведённой из точки D, к основанию ACD_1.

$V_{D_1ABC} = \frac{1}{3}S_{ACD_1} \cdot DH$. Отсюда $DH = \frac{3V_{D_1ACD}}{S_{ACD_1}}$.

Рассмотрим пирамиду D_1ABC (см. рис. 114). Расстояние от точки B до плоскости ACD_1 равно высоте, опущенной из вершины B к основанию ACD_1. Обозначим это расстояние BK. Тогда $V_{D_1ABC} = \frac{1}{3}S_{ACD_1} \cdot BK$,

из этого получаем $BK = \frac{3V_{D_1ABC}}{S_{ACD_1}}$. Но $V_{D_1ACD} = V_{D_1ABC}$, так как, если считать в пирамидах основаниями ADC и ABC, то высота D_1D общая и $S_{ADC} = S_{ABC}$ ($\triangle ADC = \triangle ABC$ по двум катетам). Значит, $BK = DH$.

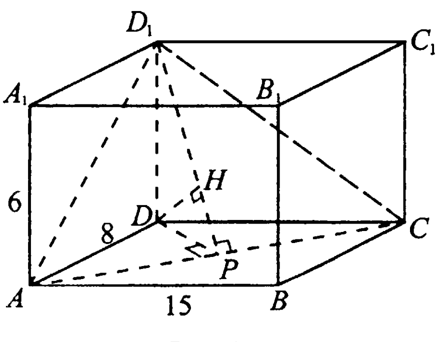


Рис. 114

б) Найдём объём пирамиды D_1ACD.

Высота $D_1D = 6$. $S_{ACD} = \frac{1}{2}AD \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 15 = 60$.
$V = \frac{1}{3}S_{ACD} \cdot D_1D = \frac{1}{3} \cdot 60 \cdot 6 = 120$.

Площадь грани ACD_1 равна $\frac{1}{2}AC \cdot D_1P$.

$AD_1 = \sqrt{AD^2 + DD_1^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$,
$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$,
$D_1C = \sqrt{DC^2 + DD_1^2} = \sqrt{15^2 + 6^2} = \sqrt{261}$.
Пусть $AP = x$, $CP = 17 - x$.

Используя теорему Пифагора в прямоугольных треугольниках AD_1P и CD_1P, получим $D_1P^2 = AD_1^2 - x^2$, $D_1P^2 = D_1C^2 - (17 - x)^2$, откуда $AD_1^2 - x^2 = D_1C^2 - (17 - x)^2$,

$100 - x^2 = 261 - (17 - x)^2$,

$100 - x^2 = 261 - 289 + 34x - x^2$, $34x = 128$, $x = \frac{64}{17}$,

$D_1P^2 = 100 - \left(\frac{64}{17}\right)^2 = \frac{24\,804}{289}$; $D_1P = \frac{6\sqrt{689}}{17}$.

$S_{ACD_1} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot D_1P = \frac{17 \cdot 6\sqrt{689}}{2 \cdot 17} = 3\sqrt{689}$.

$DH = \frac{3V}{S_{ACD_1}} = \frac{3 \cdot 120}{3\sqrt{689}} = \frac{120}{\sqrt{689}}$.

Ответ: $\frac{120}{\sqrt{689}}$.

15. Преобразуем неравенство на ОДЗ: $x > 0$, $x \neq \frac{1}{8}$.

$$(\log_{0,5} 4 - \log_{0,5} x^3)^2 + \frac{12 + 32\log_{0,5} x}{\log_{0,5} 8 + \log_{0,5} x} \geqslant 0,$$

$$(-2 - 3\log_{0,5} x)^2 + \frac{12 + 32\log_{0,5} x}{-3 + \log_{0,5} x} \geqslant 0.$$

Относительно $t = \log_{0,5} x$ неравенство имеет вид

$(2 + 3t)^2 + \frac{12 + 32t}{t - 3} \geqslant 0$, $4 + 12t + 9t^2 + \frac{12 + 32t}{t - 3} \geqslant 0$,

$$\frac{4t+12t^2+9t^3-12-36t-27t^2+12+32t}{t-3} \geqslant 0, \quad \frac{9t^3-15t^2}{t-3} \geqslant 0,$$

$$\frac{9t^2\left(t-\frac{5}{3}\right)}{t-3} \geqslant 0.$$

Получаем $t \leqslant \frac{5}{3}$, $t > 3$. Возвращаясь к x, находим $\log_{0,5} x > 3$, $\log_{0,5} x \leqslant \frac{5}{3}$, откуда $0 < x < 0{,}5^3$ или $x \geqslant (0{,}5)^{\frac{5}{3}}$, то есть $0 < x < \frac{1}{8}$, $x \geqslant \frac{\sqrt[3]{2}}{4}$ (см. рис. 115).

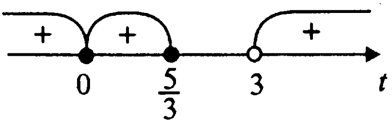


Рис. 115

Ответ: $\left(0; \frac{1}{8}\right) \cup \left[\frac{\sqrt[3]{2}}{4}; +\infty\right)$.

16. а) $\triangle ABH = \triangle ARB$ по катету и гипотенузе (см. рис. 116) ($BH = BR$ по условию, AB общая), следовательно, $AH = AR$ и $\angle HAB = \angle BAR$. AB — биссектриса угла A в $\triangle AHC$, по свойству биссектрисы $AH : AC = BH : BC = 1 : 4$. Обозначим $AH = x$, $BH = y$, тогда $BC = 4y$, $AR = x$, $CA = 4x$, $RC = 3x$.

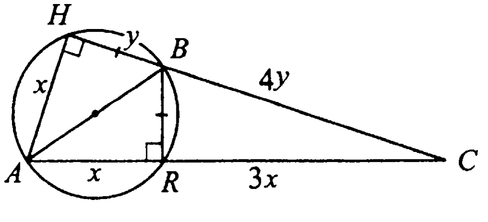


Рис. 116

По теореме Пифагора в $\triangle BRC$ выполняется $BR^2 + RC^2 = BC^2$, $y^2 + (3x)^2 = (4y)^2$, $9x^2 = 15y^2$, $x = \sqrt{\frac{5}{3}}y$.

В прямоугольном $\triangle ABR$ $AB^2 = x^2 + y^2 = \left(\sqrt{\frac{5}{3}}y\right)^2 + y^2 = \frac{8}{3}y^2$,

$AB = \sqrt{\frac{8}{3}}y = \frac{2\sqrt{6}}{3}y.$

Мы получили, что диаметр описанной окружности $\triangle ABR$ равен $\frac{2\sqrt{6}}{3}BR$.

б) $S_{BRC} = \frac{1}{2}BR \cdot RC = \frac{1}{2}y \cdot 3x = \frac{3}{2}xy.$

$S_{AHBR} = 2S_{AHB} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot xy = xy.$

Так как $\triangle ABR$ прямоугольный, то AB является диаметром описанной около него окружности.

$S_{HRC} = \frac{1}{2}HC \cdot RC \cdot \sin C,$

$S_{BRC} = \frac{1}{2}BC \cdot RC \cdot \sin C$, тогда $\frac{S_{HRC}}{S_{BRC}} = \frac{HC}{BC} = \frac{5}{4},$

$S_{HRC} = \frac{5}{4}S_{BRC} = \frac{15}{8}xy = 75, xy = 40.$

$S_{AHBR} = xy = 40.$

Ответ: 40.

17. Если сумма долга на конец месяца была a, тогда после увеличения на 4% она станет $a + a \cdot \frac{4}{100} = 1{,}04a$. Пусть начальная сумма кредита была 100%, после увеличения на 4% в марте она составляла $1{,}04 \cdot 100\% = 104\%$ от суммы кредита. После 10 апреля долг стал 80% от кредита, значит, Сергей заплатил $104\% - 80\% = 24\%$. В конце апреля долг стал $1{,}04 \cdot 80$, а после выплаты долг стал 60%, значит, в мае Сергей заплатил $1{,}04 \cdot 80 - 60 = 23{,}2\%$ от кредита. Аналогично в июне он заплатил $1{,}04 \cdot 60 - 30 = 32{,}4\%$ и в июле $1{,}04 \cdot 30 - 10 = 21{,}2\%$, в августе $1{,}04 \cdot 10 = 10{,}4\%$. Всего выплаты составили $24\% + 23{,}2\% + 32{,}4\% + 21{,}2\% + 10{,}4\% = 111{,}2\%$. За вычетом 100% кредита выплаты составят 11,2%.

Ответ: 11,2.

18. Преобразуем уравнения.

$6^{8x+y+2} = 6^2$, $8x + y + 2 = 2$, $y = -8x$. Для каждого x существует единственное значение y.

Пусть $2x^2 + y^2 - 33x = t$, $t = 2x^2 + 64x^2 - 33x = 66x^2 - 33x$.

Уравнение $66x^2 - 33x - t = 0$ при $D = 33^2 + 4 \cdot 66t > 0$, $t > -\frac{33}{8}$ имеет 2 корня, при $D = 0$ — один корень и при $D < 0$ $\left(\text{то есть } t < -\frac{33}{8}\right)$ не имеет корней. Найдём возможные значения t.

$3at^2 - (a+3)t - 2a + 3 = 0$ (1).

При $a = 0$ получим уравнение $-3t + 3 = 0$, $t = 1$, при этом система имеет 2 решения, так как уравнение $66x^2 - 33x = 1$ имеет два корня.

Если $a \neq 0$, то $D = (a+3)^2 - 12a(3-2a) = a^2 + 6a + 9 - 36a + 24a^2 = $
$= 25a^2 - 30a + 9 = (5a-3)^2$.

$t_1 = \frac{a+3+(5a-3)}{6a} = 1, t_2 = \frac{a+3-(5a-3)}{6a} = \frac{-4a+6}{6a} = \frac{3-2a}{3a}$.

При $t_1 = 1$ система уже имеет 2 решения, значит, чтобы система имела ровно 2 решения, возможны 2 случая:

1) $t_2 < -\frac{33}{8}$, то есть $\frac{3-2a}{3a} < -\frac{33}{8}$, $\frac{83a+24}{8 \cdot 3a} < 0$, $83a + 24 = 0$, $a = -\frac{24}{83}$; $a \neq 0$.

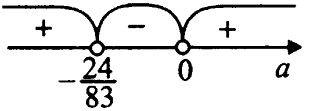


Рис. 117

$-\frac{24}{83} < a < 0$ (см. рис. 117).

2) $t_1 = t_2 = 1$, то есть $\frac{3-2a}{3a} = 1$, $a = \frac{3}{5}$.

Ответ: $\left(-\frac{24}{83}; 0\right] \cup \left\{\frac{3}{5}\right\}$.

19. а) Да, пусть рейтинги отдела A были: 7, 7, 4, а рейтинги отдела B — 2, 2, 2. Из отдела A перешёл человек с рейтингом 4. В отделе A рейтинг был $\frac{7+7+4}{3} = 6$, стал $\frac{7+7}{2} = 7$, в отделе B был рейтинг 2, стал $\frac{2+2+2+4}{4} = 2{,}5$. Рейтинги увеличились.

б) Пусть рейтинг отдела A был не больше, чем рейтинг отдела B, $R_A \leqslant R_B$, рейтинг людей отдела A — Q_{1A}, Q_{2A}, Q_{3A}, а отдела B — Q_{1B}, Q_{2B}, Q_{3B}.

Тогда $R_A = \frac{Q_{1A}+Q_{2A}+Q_{3A}}{3}$, $R_B = \frac{Q_{1B}+Q_{2B}+Q_{3B}}{3}$.

После объединения рейтинг отдела стал равен

$$R_A = \frac{Q_{1A}+Q_{2A}+Q_{3A}+Q_{1B}+Q_{2B}+Q_{3B}}{6} = \frac{3R_A+3R_B}{6} = \frac{R_A+R_B}{2}.$$

Если $R_A = R_B$, то $R = R_A = R_B$.

Если $R_A < R_B$, то $R = \frac{R_A+R_B}{2} < \frac{R_B+R_B}{2} = R_B$, $R < R_B$.

При этом $R = \frac{R_A+R_B}{2} > \frac{R_A+R_A}{2} = R_A$, $R > R_A$.

Значит, рейтинг не может стать меньше как рейтинга отдела A, так и рейтинга отдела B.

в) Запишем разность

$$R - R_A = \frac{Q_{1A}+Q_{2A}+Q_{3A}+Q_{1B}+Q_{2B}+Q_{3B}}{6} - \frac{Q_{1A}+Q_{2A}+Q_{3A}}{3} =$$

$$= \frac{Q_{1B}+Q_{2B}+Q_{3B}-(Q_{1A}+Q_{2A}+Q_{3A})}{6}.$$

Но $Q_{iB} \leqslant 9$, а $Q_{iA} \geqslant 1$, тогда $R - R_A \leqslant \frac{9+9+9-(1+1+1)}{6} = 4$.

Пример: рейтинги группы A — 1, 1, 1, группы B — 9, 9, 9.

После объединения рейтинг стал $\frac{3+9\cdot 3}{6} = 5$,

разность $R - R_A = 5 - 1 = 4$.

Ответ: а) да, б) нет, в) 4.

Решение варианта № 24

1. Переведём скорость автомобиля, выраженную в милях в час, в скорость, выраженную в километрах в час. Получим:
$36 \cdot 1{,}609 = 57{,}924 \approx 58$ (км/ч).

Ответ: 58.

2. Используя рисунок, определяем на горизонтальной оси число 11 и находим соответствующее ему число на вертикальной оси. Оно равно 16, то есть 11 сентября температура была 16 °C.

Ответ: 16.

3. Прямая a параллельна прямой b. Значит, их угловые коэффициенты равны и $(-9) : x = 12 : (-8)$; $x = \dfrac{72}{12} = 6$.

Ответ: 6.

4. Предположим, что одна девочка уже сидит за круглым столом. Тогда для второй девочки остаётся 25 стульев и из них 2 стула благоприятны (справа и слева от стула, на котором сидит первая девочка). Тогда вероятность того, что обе девочки будут сидеть рядом, равна $\dfrac{2}{25} = \dfrac{8}{100} = 0{,}08$.

Ответ: 0,08.

5. $\sqrt{\dfrac{3}{2} - \dfrac{23}{4}x} = x$; $\dfrac{3}{2} - \dfrac{23}{4}x = x^2$; $x^2 + \dfrac{23}{4}x - \dfrac{3}{2} = 0$; $4x^2 + 23x - 6 = 0$; $x_{1,2} = \dfrac{-23 \pm 25}{8}$; $x_1 = -6$, $x_2 = \dfrac{1}{4}$. Проверка показывает, что корнем исходного уравнения является $x = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$.

Ответ: 0,25.

6. Так как $\sin A = \dfrac{BC}{AB}$ (см. рис. 118), то $AB = \dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{BC}{\sqrt{1 - \cos^2 A}} =$
$= \dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{1 - 0{,}25}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{0{,}5\sqrt{3}} = 10$.

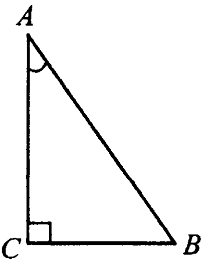


Рис. 118

Ответ: 10.

7. Если $f'(x) < 0$ на некотором промежутке, то $f(x)$ убывает на этом промежутке.

Из указанных точек точки x_4, x_5 и x_7 принадлежат промежуткам убывания функции. Таких точек три.

Ответ: 3.

8. DC_2 является диагональю параллелепипеда с измерениями $DC = 3$, $B_2C = 9$, $B_2C_2 = 2$.

Тогда $DC_2^2 = DC^2 + CB_2^2 + B_2C_2^2 = 3^2 + 9^2 + 2^2 = 9 + 81 + 4 = 94$.

Ответ: 94.

9. $\dfrac{15(k^4)^{12} + 13(k^{24})^2}{(2k^{16})^3} = \dfrac{15k^{48} + 13k^{48}}{8k^{48}} = \dfrac{28}{8} = \dfrac{7}{2} = 3{,}5.$

Ответ: 3,5.

10. В формулу $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$ подставим исходные данные:

$18{,}75 = 150 \cdot 2^{-\frac{t}{3}};\ 2^{-\frac{t}{3}} = \dfrac{18{,}75}{150};\ 2^{-\frac{t}{3}} = 2^{-3};\ -\dfrac{t}{3} = -3;\ t = 9.$

Ответ: 9.

11. Пусть x метров — длина платформы. Тогда $(1600 + x)$ метров прошёл поезд мимо платформы за 4 минуты 12 секунд (4 мин 12 сек $= 0{,}07$ ч).

Составим и решим уравнение.

$\dfrac{1600 + x}{0{,}07} = 40\,000;\ 1600 + x = 2800;\ x = 1200.$

Ответ: 1200.

12. $y' = (x^5 + 20x^3 - 320x)' = 5x^4 + 60x^2 - 320.$

$y' = 0;\ 5x^4 + 60x^2 - 320 = 0;\ x^4 + 12x^2 - 64 = 0;\ x^2 = -16$ (не имеет решений) или $x^2 = 4;\ x = \pm 2$.

Находим значения функции в найденных стационарных точках и на концах отрезка:

$y(-2) = -32 - 160 + 640 = 448;$

$y(2) = 32 + 160 - 640 = -448;$

$y(5) = 3125 + 2500 - 1600 = 4025.$

Наименьшее значение равно -448.

Ответ: -448.

13. а) Преобразуем уравнение:

$2\cos^2 x - 1 = -\cos x,$

$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0,$

$(2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$, откуда $\cos x = -1$ или $\cos x = \dfrac{1}{2}$.

Из уравнения $\cos x = -1$ находим: $x = \pi + 2\pi n$, где $n \in Z$.

Из уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$ находим: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, где $n \in Z$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$ (см. рис. 119).

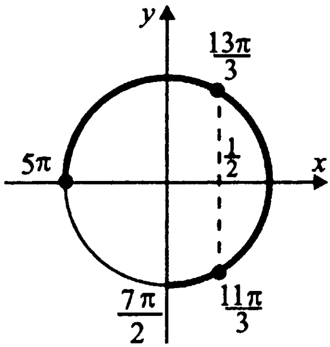


Рис. 119

Получаем числа: 5π; $-\frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{11\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{13\pi}{3}$.

Ответ: а) $\pi + 2\pi n, \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$; б) $\frac{11\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}, 5\pi$.

14. а) Рассмотрим рисунок 120. $AA_1 = CC_1 = 14$, по теореме Пифагора $A_1D^2 = AA_1^2 + AD^2, C_1D^2 = CC_1^2 + DC^2, A_1C_1^2 = A_1D_1^2 + D_1C_1^2$

Получаем $A_1C_1 = \sqrt{48^2 + 48^2} = 48\sqrt{2}$;
$A_1D = C_1D = \sqrt{48^2 + 14^2} = 50$.

$\triangle A_1C_1D$ равнобедренный.

Проведём $DO \perp A_1C_1$. O — середина A_1C_1. В квадрате $A_1B_1C_1D_1$ диагонали перпендикулярны и равны, поэтому точка O — точка пересечения диагоналей.

$A_1O = OC_1 = B_1O = OD_1 = A_1C_1 : 2 = 24\sqrt{2}$.

Проведём $D_1H \perp OD$ и $B_1K \perp OD$.

$\triangle B_1KO = \triangle D_1HO$ по гипотенузе и острому углу ($\angle KOB_1 = \angle HOD_1$ как вертикальные), отсюда $B_1K = D_1H$.

Докажем, что D_1H — расстояние от D_1 до плоскости A_1C_1D. Для этого необходимо указать две прямые в плоскости A_1C_1D, перпендикулярные D_1H.

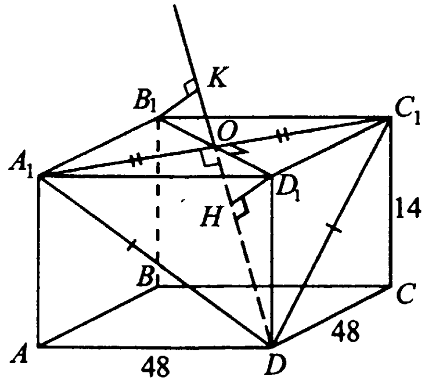


Рис. 120

$OD \perp D_1H$ по построению. $A_1C_1 \perp D_1O$ и $A_1C_1 \perp OD$, значит, $A_1C_1 \perp (OD_1D)$ и A_1C_1 перпендикулярна любой прямой, лежащей в данной плоскости. $D_1H \perp A_1C_1 \Rightarrow D_1H \perp (A_1C_1D_1)$.

Аналогично $B_1K \perp (A_1C_1D)$, значит, B_1K — расстояние от B_1 до плоскости A_1C_1D. Мы получили ранее, что $B_1K = D_1H$.

б) В $\triangle OD_1D$ высоту D_1H найдём, выражая площадь треугольника двумя способами.

$S_{OD_1D} = \frac{1}{2}OD \cdot D_1H = \frac{1}{2}OD_1 \cdot DD_1$. Тогда

$$D_1H = \frac{OD_1 \cdot DD_1}{OD} = \frac{OD_1 \cdot DD_1}{\sqrt{OD_1^2 + DD_1^2}} = \frac{24\sqrt{2} \cdot 14}{\sqrt{1348}} = \frac{24 \cdot 14}{\sqrt{674}} = \frac{336}{\sqrt{674}}.$$

Ответ: $\frac{336}{\sqrt{674}}$.

15. Преобразуем неравенство на ОДЗ: $x > 0$, $x \neq \frac{1}{25}$.

$$(\log_{0,2} 5 + \log_{0,2} x^2)^2 + \frac{2\log_{0,2}^2 x - 9\log_{0,2} x + 2}{\log_{0,2}(25x)} \leqslant 0,$$

$$(2\log_{0,2} x - 1)^2 + \frac{2\log_{0,2}^2 x - 9\log_{0,2} x + 2}{\log_{0,2} 25 + \log_{0,2} x} \leqslant 0.$$

Относительно $t = \log_{0,2} x$ неравенство имеет вид

$$(2t-1)^2 + \frac{2t^2 - 9t + 2}{t - 2} \leqslant 0,\ 4t^2 - 4t + 1 + \frac{2t^2 - 9t + 2}{t - 2} \leqslant 0,$$

$$\frac{4t^3-4t^2+t-8t^2+8t-2+2t^2-9t+2}{t-2}\leqslant 0,\ \frac{4t^3-10t^2}{t-2}\leqslant 0,$$

$$\frac{4t^2\left(t-\frac{5}{2}\right)}{t-2}\leqslant 0\ (\text{см. рис. } 121).$$

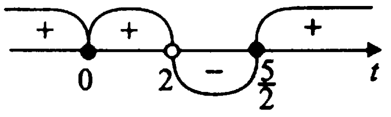


Рис. 121

Получаем $t=0$; $2<t\leqslant\frac{5}{2}$. Возвращаясь к x, получаем $\log_{0,2}x=0$, $x=1$; $2<\log_{0,2}x\leqslant\frac{5}{2}$, откуда $0{,}2^{\frac{5}{2}}\leqslant x<0{,}2^2$, то есть $\frac{1}{25\sqrt{5}}\leqslant x<\frac{1}{25}$.

Ответ: $\left[\frac{\sqrt{5}}{125};\frac{1}{25}\right)\cup\{1\}$.

16. а) Рассмотрим рисунок 122. $BM:MC=2:7$, обозначим $BM=2y$, $MC=7y$. По свойству биссектрисы в $\triangle ABC$ $AB:AC=BM:MC=2:7$.

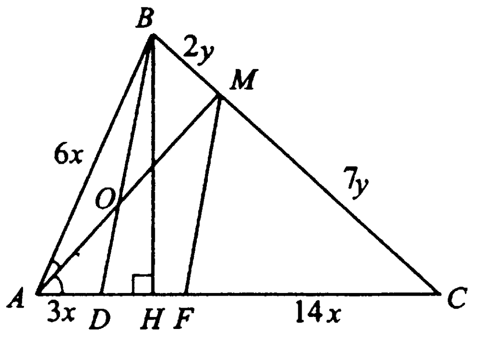


Рис. 122

Стороны угла C пересекают прямые $BD\parallel MF$, тогда $CM:MB=FC:DF=7:2$.

По условию $AD:FC=3:14$, пусть $AD=3x$, $DF=4x$, $FC=14x$, тогда
$AC=3x+4x+14x=21x$.

$AB : AC = 2 : 7$, $AB = 21x \cdot 2 : 7 = 6x$. Получим $AB = 2AD$.

б) Пусть $S_{ABC} = S$. AM — биссектриса, $\angle BAO = \angle OAD = \alpha$.

$S_{ABO} = \frac{1}{2}AO \cdot AB \cdot \sin\alpha = \frac{6x \cdot AO \cdot \sin\alpha}{2}$,

$S_{ADO} = \frac{1}{2}AO \cdot AD \cdot \sin\alpha = \frac{AO \cdot 3x \cdot \sin\alpha}{2}$, $\frac{S_{ABO}}{S_{ADO}} = \frac{6}{3}$, $\frac{S_{ABO}}{S_{ABD}} = \frac{2}{3}$.

Проведём BH — высоту $\triangle ABD$.
Она также является высотой $\triangle ABC$ и $\triangle BDC$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 21x \cdot BH = \frac{21}{2}x \cdot BH = S$.

$S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot BH = \frac{1}{7}S$, $S_{BDC} = \frac{1}{2}DC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 18x \cdot BH = \frac{18}{21}S = \frac{6}{7}S$.

$\triangle BDC \sim \triangle MFC$ по двум углам ($\angle C$ общий, $\angle BDC = \angle MFC$ как соответственные при $BD \parallel MF$ и секущей AC).

$MC : BC = 7y : 9y = 7 : 9$, значит, $S_{MFC} : S_{BDC} = \left(\frac{7}{9}\right)^2 = \frac{49}{81}$.

$S_{DBMF} = S_{BDC} - S_{MFC} = S_{BDC} - \frac{49}{81}S_{BDC} = \frac{32}{81}S_{BDC} = \frac{32}{81} \cdot \frac{6}{7}S =$
$= \frac{64S}{189}$.

$S_{ABO} = \frac{2}{3}S_{ABD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{7}S = \frac{2}{21}S$.

Тогда $\frac{S_{DBMF}}{S_{ABO}} = \frac{64S}{189} : \frac{2}{21}S = \frac{32}{9}$; $S_{DBMF} = \frac{32}{9} \cdot 27 = 96$.

Ответ: 96.

17. Приведём таблицу ставки в % за месяц.

Срок вклада	1 мес.	2 мес.	3 мес.	4 мес.	5 мес.	6 мес.
Ставка в % за месяц	$\frac{12\%}{12} = 1\%$	1%	$\frac{15\%}{12} = 1{,}25\%$	1,25%	$\frac{18}{12}\%$	1,5%

За первый месяц банк на сумму 100% от начального вклада начислит 1%, и вклад увеличится на $100\% \cdot 0{,}01 = 1\%$. За второй месяц банк на сумму 105% от начального вклада начислит также 1%, что составит $105\% \cdot 0{,}01 = 1{,}05\%$.

В третьем месяце начисления по вкладу составят 1,25% от 110%, то есть $110\% \cdot 0{,}0125 = 1{,}375\%$, в четвёртом — $115\% \cdot 0{,}0125 = 1{,}4375\%$, в пятом — $120\% \cdot 0{,}015 = 1{,}8\%$ и в шестом — $125\% \cdot 0{,}015 = 1{,}875\%$.

Всего банк начислил
$1\% + 1{,}05\% + 1{,}375\% + 1{,}4375\% + 1{,}8\% + 1{,}875\% = 8{,}5375\%$.

Ответ: 8,5375.

18. Преобразуем уравнения.

$\sqrt{4-2x+y} = 2;\ 4-2x+y=4;\ y=2x.$

При $t = x^2 + 3y + 1$ второе уравнение примет вид $at^2-(a+1)t-(2a+1)=0$. Найдём его корни.

При $a=0$ получим $t=-1$.

При $a \neq 0$ $D=(a+1)^2+4a(2a+1)=9a^2+6a+1=(3a+1)^2$.

$$t_{1,2} = \frac{a+1 \pm \sqrt{(3a+1)^2}}{2a},$$

$$t_1 = \frac{a+1-3a-1}{2a} = -1.$$

$$t_2 = \frac{a+1+3a+1}{2a} = \frac{2a+1}{a}.$$

Учитывая, что $y=2x$, получаем $t=x^2+6x+1$.

$x^2+6x+1=-1$ или $x^2+6x+1=\dfrac{2a+1}{a}$.

При $t_1=t_2$ получим $\dfrac{2a+1}{a}=-1,\ a=-\dfrac{1}{3}$.

Первое уравнение имеет два корня $x_{1,2}=-3\pm\sqrt{7}$.

Чтобы система имела не более трёх решений, второе уравнение должно либо не иметь решений, либо иметь одно, то есть его дискриминант $D \leqslant 0$.

$$D=6^2-4\left(1-\frac{2a+1}{a}\right)\leqslant 0;\ 9-1+\frac{2a+1}{a}\leqslant 0;\ \frac{10a+1}{a}\leqslant 0.$$

$a \in [-0{,}1;0)$.

Учитывая, что при $a=0$, $t=-1$ получается два корня, а при каждом значении x находится единственный $y=2x$, не более трёх решений в системе будет при $a\in[-0{,}1;0]$ или $a=-\dfrac{1}{3}$ (см. рис. 123).

Ответ: $\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}\cup[-0{,}1;0]$.

19. а) Да, пусть рейтинги отдела A были: 1, 1, 1, 5, а рейтинги отдела B — 9, 9, 9, 9. Из отдела A пришёл человек с рейтингом 5. В отделе A рейтинг

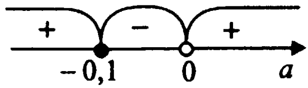


Рис. 123

был $\dfrac{1+1+1+5}{4}=2$, стал $\dfrac{1+1+1}{3}=1$, в отделе B был рейтинг 9, стал $\dfrac{9+9+9+9+5}{5}=8{,}2$. Рейтинги уменьшились.

б) Пусть рейтинг отдела A был не больше, чем рейтинг отдела B, $R_A \leqslant R_B$, рейтинг людей отдела A — Q_{1A}, Q_{2A}, Q_{3A}, Q_{4A} а отдела B — Q_{1B}, Q_{2B}, Q_{3B} , Q_{4B}.

Тогда $R_A=\dfrac{Q_{1A}+Q_{2A}+Q_{3A}+Q_{4A}}{4}$,

$$R_B=\frac{Q_{1B}+Q_{2B}+Q_{3B}+Q_{4B}}{4}.$$

После объединения рейтинг отдела стал равен

$$R=\frac{Q_{1A}+Q_{2A}+Q_{3A}+Q_{4A}+Q_{1B}+Q_{2B}+Q_{3B}+Q_{4B}}{8}=$$

$$=\frac{4R_A+4R_B}{8}=\frac{R_A+R_B}{2}.$$

Если $R_A=R_B$, то $R=R_A=R_B$.

Если $R_A<R_B$, то $R=\dfrac{R_A+R_B}{2}<\dfrac{R_B+R_B}{2}=R_B$, $R<R_B$.

При этом $R=\dfrac{R_A+R_B}{2}>\dfrac{R_A+R_A}{2}=R_A$, $R>R_A$.

Значит, рейтинг не может стать меньше как рейтинга отдела A, так и рейтинга отдела B.

в) Запишем разность

$$R-R_A=\frac{Q_{1A}+Q_{2A}+Q_{3A}+Q_{4A}+Q_{1B}+Q_{2B}+Q_{3B}+Q_{4B}}{8}$$

$$\frac{Q_{1A}+Q_{2A}+Q_{3A}+Q_{4A}}{4}=$$

$$=\frac{Q_{1B}+Q_{2B}+Q_{3B}+Q_{4B}-(Q_{1A}+Q_{2A}+Q_{3A}+Q_{4A})}{8}.$$

Но $Q_{iB}\leqslant 9$, а $Q_{iA}\geqslant 1$, то есть

$$R-R_A\leqslant\frac{9+9+9+9-(1+1+1+1)}{8}=4.$$

Пример: рейтинги группы A — 1, 1, 1, 1, группы B — 9, 9, 9, 9.

После объединения рейтинг стал $\frac{4+9\cdot 4}{8} = 5$, разность $R - R_A = 5 - 1 = 4$.

Ответ: а) да, б) нет, в) 4.

Решение варианта № 26

1. Так как разность показаний счётчика 1 сентября и 1 августа равна $14\,555 - 14\,341 = 214$ (киловатт-час), то заплатить за месяц нужно $2{,}4 \cdot 214 = 513{,}6$ (руб.).

Ответ: 513,6.

2. Проведём горизонтальную прямую через отметку 3 на вертикальной оси и подсчитаем количество точек, расположенных на этой прямой и ниже, абсциссы которых меняются от 8 до 20. Таких точек 9.

Ответ: 9.

3. Площадь кольца равна разности площадей кругов радиусов $R = 6$ и $r = 4$: $S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$ (см. рис 124).

$$\frac{S}{\pi} = R^2 - r^2 = 6^2 - 4^2 = (6-4)(6+4) = 20.$$

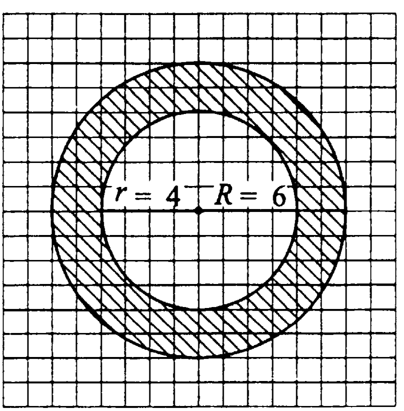


Рис. 124

Ответ: 20.

4. В каждой из отмеченных точек (их три) (см. рис. 125) крыса с вероятностью $\frac{1}{2}$ выберет один из двух возможных маршрутов, следовательно, попасть к выходу A крыса может с вероятностью $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0{,}125$.

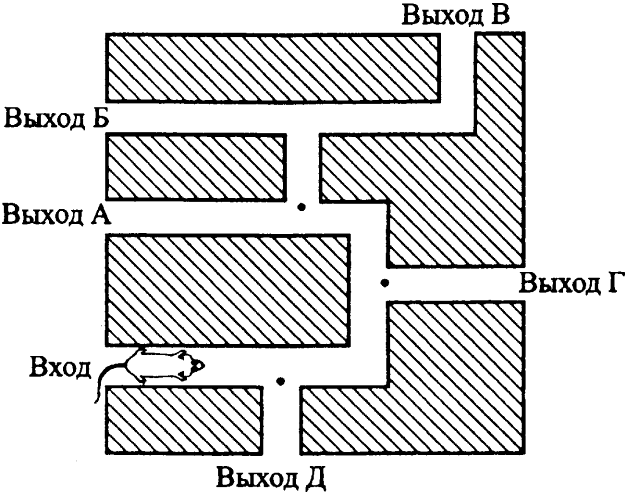


Рис. 125

Ответ: 0,125.

5. $\dfrac{3x+12}{9x-14} = \dfrac{3x+12}{12x-23}$

ОДЗ. $x \neq \frac{14}{9}, x \neq \frac{23}{12}$.

1) $3x + 12 = 0$, $x = -4$ — корень уравнения (принадлежит ОДЗ).

2) Если $x \neq -4$, то разделим обе части уравнения на $3x + 12$, получим $\dfrac{1}{9x-14} = \dfrac{1}{12x-23}$, тогда $9x-14 = 12x-23, 3x = 9, x = 3$ (принадлежит ОДЗ).

$x = 3$ — больший корень.

Ответ: 3.

6. По условию $S_{ABCD} = 442$. $S_{ABCD} = AB \cdot AH$, где AH — высота параллелограмма (см. рис. 126).

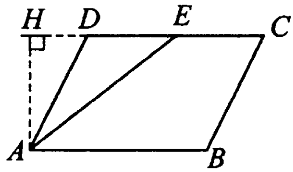


Рис. 126

$$S_{ABCE} = S_{ABCD} - S_{ADE} = 442 - \frac{1}{2}DE \cdot AH = 442 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}DC \cdot AH =$$

$$= 442 - \frac{1}{4}AB \cdot AH = 442 - \frac{1}{4} \cdot 442 = 442 \cdot \frac{3}{4} = 110{,}5 \cdot 3 = 331{,}5.$$

Ответ: 331,5.

7. Среди отмеченных точек промежуткам убывания принадлежат те, в которых $f'(x)$ меньше нуля. Таких точек 5.

Ответ: 5.

8. $S_{\text{бок.ц}} = 2\pi RH$. По условию $S_{\text{бок.ц}} = 24\pi$, $H = 5$. Тогда, $24\pi = 2\pi R \cdot 5$, откуда $R = 2{,}4$.

Ответ: 2,4.

9. $(\log_3 81)(\log_2 64) = (\log_3 3^4)(\log_2 2^6) = 4 \cdot 6 = 24$.

Ответ: 24.

10. По условию $H_0 = 5$ м, $k = \frac{1}{200}$, $g = 10$ м/с^2, $H(t) \leqslant 4{,}05$ м.

$$5 - \frac{1}{200}t\sqrt{2 \cdot 10 \cdot 5} + \frac{10}{2}\frac{1}{200^2}t^2 \leqslant 4{,}05,$$

$$\frac{5}{200^2}t^2 - \frac{t}{20} + \frac{19}{20} \leqslant 0,$$

$$\frac{t^2}{8000} - \frac{t}{20} + \frac{19}{20} \leqslant 0,$$

$t^2 - 400t + 7600 \leqslant 0,$
$(t - 380)(t - 120) \leqslant 0,$
$20 \leqslant t \leqslant 380.$

$t^2 - 400t + 7600 = 0.$
$t_{1,2} = 200 \pm \sqrt{32\,400} = 200 \pm 180.$
$t_1 = 380, t_2 = 20.$

Через $t = 20$ с высота столба воды в баке составит не более 4,05 м.

Ответ: 20.

11. Пусть x, y, z — производительность Егора, Тимофея и Никиты соответственно. Тогда

$$\begin{cases} x+y=\frac{1}{15}, \\ x+z=\frac{1}{12}, \\ y+z=\frac{1}{20}; \end{cases}$$

$$2(x+y+z)=\frac{1}{15}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20},$$

$$x+y+z=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}\right),$$

$$x+y+z=\frac{1}{10}.$$

Значит, все три мастера сделают ремонт за 10 дней.

Ответ: 10.

12. Пусть $f(x)>0$ для любого $x>0$. Если функция $y=f(x)$ на промежутке $[a;b]$ возрастает или убывает, то функция $y=\log_5 f(x)+13$ также соответственно возрастает или убывает на этом промежутке.

$x^2-16x+82>0$ для любого x, $x=8$ является точкой минимума квадратичной функции $y=x^2-16x+82$ и при $x\leqslant 8$ функция $y=x^2-16x+82$ убывает, а при $x\geqslant 8$ функция $y=x^2-16x+82$ возрастает. Значит, по свойству логарифмической функции с основанием, большим 1, функция $y=\log_5(x^2-16x+82)+13$ при $x\leqslant 8$ убывает, а при $x\geqslant 8$ возрастает. Это и означает, что $x=8$ является точкой минимума функции $y=\log_5(x^2-16x+82)+13$.

Ответ: 8.

13. а) Разделим все части уравнения на $18^{\sin 2x}>0$.

Получим уравнение $3\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{\sin 2x}-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\sin 2x}-1=0$.

Пусть $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sin 2x}=t$, где $t>0$.

Квадратное уравнение $3t^2-2t-1=0$ имеет корни $t_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{4-4\cdot 3\cdot(-1)}}{2\cdot 3}=\dfrac{2\pm\sqrt{16}}{6}=\dfrac{2\pm 4}{6}$; $t_1=1$, $t_2=-\dfrac{1}{3}$ (не удовлетворяет условию $t>0$).

Из уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sin 2x}=1$ получаем $\sin 2x=0$; $2x=\pi n$; $x=\dfrac{\pi n}{2}$, $n\in Z$.

б) Найдём корни на промежутке $\left[-\frac{9}{2}\pi; -\frac{5}{2}\pi\right)$.

$-\frac{9}{2}\pi \leqslant \frac{\pi n}{2} < -\frac{5}{2}\pi$; $-9 \leqslant n < -5$.

При $n = -9$, $x_1 = -\frac{9}{2}\pi$.

При $n = -8$, $x_2 = -4\pi$.

При $n = -7$, $x_3 = -\frac{7}{2}\pi$.

При $n = -6$, $x_4 = -3\pi$.

Ответ: а) $\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; б) $-\frac{9}{2}\pi$; -4π; $-\frac{7}{2}\pi$; -3π.

14. а) Так как CM — медиана правильного треугольника ABC, то $AB \perp CM$. Аналогично $AB \perp SM$. Значит, $AB \perp SMC$ (см. рис. 127).

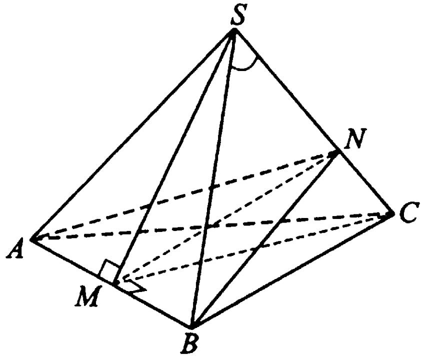


Рис. 127

Но прямая AB лежит в плоскости ANB. Следовательно, $ANB \perp SMC$ по признаку перпендикулярности плоскостей.

б) По условию $SN = 6$, $NC = 2$, $\angle BSC = 60°$. По теореме косинусов для треугольника BSN:

$$BN^2 = BS^2 + SN^2 - 2 \cdot BS \cdot SN \cdot \cos 60° = 64 + 36 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 52.$$

По теореме Пифагора: $MN^2 = BN^2 - MB^2 = 52 - 16 = 36$.

Отсюда $MN = \sqrt{36} = 6$.

Ответ: 6.

15. $|3^x - 5| - 3 \geqslant \dfrac{1}{5 - |3^x - 5|}$.

Пусть $t = |3^x - 5|$, $t \geqslant 0$. Тогда получаем неравенство: $t - 3 \geqslant \dfrac{1}{5-t}$;

$t - 3 + \dfrac{1}{t-5} \geqslant 0$; $\dfrac{(t-4)^2}{t-5} \geqslant 0$; $\left[\begin{array}{l} t = 4, \\ t > 5. \end{array}\right.$

Отсюда $|3^x - 5| = 4$; $\left[\begin{array}{l} 3^x - 5 = 4, \\ 3^x - 5 = -4; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 3^x = 9, \\ 3^x = 1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 0; \end{array}\right.$

или $|3^x - 5| > 5$; $\left[\begin{array}{l} 3^x - 5 > 5, \\ 3^x - 5 < -5; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 3^x > 10, \\ 3^x < 0; \end{array}\right.$ $x > \log_3 10$.

Ответ: $\{0\} \cup \{2\} \cup (\log_3 10; +\infty)$.

16. а) Так как O_1C — биссектриса $\angle ACB$, а O_2C — биссектриса $\angle BCD$, то $\angle O_1CO_2 = \angle O_1CB + \angle BCO_2 = \frac{1}{2}(\angle ACB + \angle BCD) = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$ (см. рис. 128).

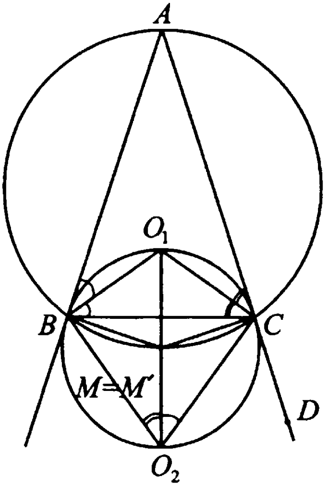


Рис. 128

Аналогично $\angle O_1BO_2 = 90°$.

Следовательно, точки O_1, C, O_2 и B лежат на одной окружности диаметром O_1O_2.

$\angle O_1BC = \angle O_1O_2C$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу.

Аналогично $\angle O_1CB = \angle O_1O_2B$.

Тогда $\angle BO_2C = \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2} = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$ (по свойству суммы углов треугольника ABC).

Пусть M' — середина отрезка O_1O_2, то есть центр окружности, описанной вокруг O_1CO_2B (M' — середина гипотенузы $\triangle O_1BO_2$). Тогда $\angle BM'C = 2\angle BO_2C = 180^\circ - \angle A$ ($\angle BM'C$ — центральный угол, опирающийся на ту же дугу, что и вписанный $\angle BO_2C$).

В четырёхугольнике $ABM'C$ сумма противоположных углов $\angle BAC + \angle BM'C = \angle A + 180^\circ - \angle A = 180^\circ$.

Значит, точки A, B, C и M' лежат на одной окружности, и это описанная окружность $\triangle ABC$. Следовательно, точка M' совпадает с точкой M и $O_1M = MO_2$.

б) Из пункта а) следует, что BM — радиус описанной окружности четырёхугольника O_1CO_2B, а O_1O_2 — её диаметр.

Значит, $O_1O_2 = 2BM = 2 \cdot 5 = 10$.

Ответ: 10.

17. Пусть N — сумма вложений клиентов банка. Результаты использования этих средств приведём в таблице:

Проекты	**Сумма вложений**	**Минимальная выручка**	**Максимальная выручка**
A	$0{,}2N$	$1{,}25 \cdot 0{,}2N = 0{,}25N$	$1{,}3 \cdot 0{,}2N = 0{,}26N$
B	$0{,}3N$	$1{,}35 \cdot 0{,}3N = 0{,}405N$	$1{,}42 \cdot 0{,}3N = 0{,}426N$
C	$0{,}5N$	$1{,}32 \cdot 0{,}5N = 0{,}66N$	$1{,}48 \cdot 0{,}5N = 0{,}74N$
Сумма	N	$1{,}315N$	$1{,}426N$

Для получения наименьшей чистой прибыли необходимо получить минимальную выручку и выплатить максимальный процент клиентам. Поэтому наименьшая чистая прибыль равна $1{,}315N - 1{,}22N = 0{,}095N$, то есть 9,5%.

Для получения наибольшей чистой прибыли необходимо получить максимальную выручку по итогам года и выплатить минимальный процент клиентам. Поэтому наибольшая чистая прибыль равна $1{,}426N - 1{,}14N = 0{,}286N$, то есть 28,6%.

Ответ: 9,5% и 28,6%.

18. Данное неравенство равносильно неравенству

$0 \leqslant 2\cos x + 4a - \sin x \cdot \sin 2x - 4a\sin^2 x + 10a^2\cos x + 16 < 24.$

Далее

$0 \leqslant 2\cos x + 4a - 2\sin^2 x \cdot \cos x - 4a(1 - \cos^2 x) + 10a^2\cos x + 16 < 24;$

$0 \leqslant \cos x + 2a - \cos x(1 - \cos^2 x) - 2a + 2a\cos^2 x + 5a^2 \cos x + 8 < 12;$
$-8 \leqslant \cos^3 x + 2a\cos^2 x + 5a^2 \cos x < 4.$

Пусть $\cos x = t$, тогда получим неравенство $-8 \leqslant t^3 + 2at^2 + 5a^2 t < 4$, которое должно выполняться при всех значениях $t \in [-1; 1]$.

Если $a = 0$, то неравенство принимает вид $-8 \leqslant t^3 < 4$, которое выполняется для $t \in [-1; 1]$.

Пусть $a \neq 0$. Функция $f(t) = t^3 + 2at^2 + 5a^2 t$ возрастает на отрезке $[-1; 1]$, так как её производная $f'(t) = 3t^2 + 4at + 5a^2 > 0$ при любом $t \in R$ и $a \neq 0$ (дискриминант квадратного трёхчлена отрицателен, а старший коэффициент больше нуля).

Неравенство $-8 \leqslant f(t) < 4$ будет выполняться при условиях

$$\begin{cases} f(-1) \geqslant -8, \\ f(1) < 4, \\ a \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -1 + 2a - 5a^2 \geqslant -8, \\ 1 + 2a + 5a^2 < 4, \\ a \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -1 \leqslant a \leqslant \dfrac{7}{5}, \\ -1 < a < \dfrac{3}{5}, \\ a \neq 0. \end{cases}$$

Учитывая, что $a = 0$ удовлетворяет условно, получим $-1 < a < \dfrac{3}{5}$.

Ответ: $\left(-1; \frac{3}{5}\right)$.

19. а) Нельзя. Среднее арифметическое всех пяти чисел равно $\dfrac{1+2+3+4+5}{5} = 3$, то есть является целым числом.

б) Нельзя. Среднее арифметическое всех $2k + 1$ чисел равно $\dfrac{1+2+\ldots+(2k+1)}{2k+1} = \dfrac{(1+(2k+1))(2k+1)}{2} : (2k+1) = k+1$, то есть является целым числом.

в) Можно. Например, 2; 1; 4; 3; 6; 5; 8; 7. Суммы из двух чисел (3; 5; 7; 9; 11; 13; 15) не делятся на два, суммы из трёх чисел (7; 8; 13; 14; 19; 20) не делятся на 3, суммы из четырёх чисел (10; 14; 18; 22; 26) не делятся на 4, суммы из пяти чисел (16; 19; 26; 29) не делятся на 5, суммы шести чисел (21; 27; 33) не делятся на 6, суммы из семи чисел (29; 34) не делятся на 7, сумма всех восьми чисел (36) не делится на 8.

г) Можно. Например, $2; 1; 4; 3; \ldots 2k; 2k - 1$. Рассмотрим среднее арифметическое подряд идущих m чётных чисел и m нечётных чисел (на чиная с чётного):

$$\frac{2k+2(k+1)+\ldots+2(k+m-1)+(2k-1)+(2(k+1)-1)+\ldots+2(k+m-1)-1}{2m}=$$

$$=\frac{(2k-1)+2k+\ldots+2(k+m-1)}{2m}=\frac{(2k-1)+2(k+m-1)}{2}\cdot 2m:2m=$$

$$=\frac{4k+2m-3}{2}=2k+m-\frac{3}{2},$$ то есть не целое число.

Рассмотрим среднее арифметическое m чётных и m нечётных чисел, начиная с нечётного:

$$=\Big((2k-1)+(2(k+1)-1)+\ldots+2(k+m-1)-1+2(k+1)+2(k+2)+\ldots$$

$$\ldots+2(k+m)\Big):2m=\frac{(2k-1)+2k+(2k+1)+\ldots+2(k+m-1)}{2m}+$$

$$+\frac{2(k+m)-2k}{2m}=2k+m-\frac{3}{2}+1,$$ то есть не целое число.

Рассмотрим среднее арифметическое подряд идущих m чётных чисел и $(m-1)$ нечётных чисел $(m>1)$:

$$\frac{2k+2(k+1)+\ldots+2(k+m-1)+(2k-1)+(2(k+1)-1)+\ldots+2(k+m-2)-1}{2m-1}=$$

$$=\frac{(2k-1)+2k+\ldots+2(k+m-1)-(2(k+m-1)-1)}{2m-1}=$$

$$=\left(\frac{(2k-1)+2(k+m-1)}{2}\cdot 2m-(2(k+m-1)-1)\right):(2m-1)=$$

$$=\frac{(4k+2m-3)m-2k-2m+3}{2m-1}=$$

$$=\frac{(2m-1)m+2k(2m-1)-2(2m-1)+1}{2m-1}=m+2k-2+\frac{1}{2m-1},$$

то есть не целое число.

Рассмотрим среднее арифметическое подряд идущих $(m-1)$ чётных чисел и m нечётных чисел $(m>1)$ (такая последовательность по построению начинается с чётного числа):

$$\frac{2(k+1)+2(k+2)+\ldots+2(k+m-1)+(2k-1)+(2(k+1)-1)+\ldots+2(k+m-1)-1}{2m-1}=$$

$$=\frac{(2k-1)+2k+\ldots+2(k+m-1)-2k}{2m-1}=$$

$$=\left(\frac{(2k-1)+2(k+m-1)}{2}\cdot 2m-2k\right):(2m-1)=$$

$$=\frac{(4k+2m-3)m-2k}{2m-1}=\frac{(2m-1)m+4km-2k-2m}{2m-1}=$$

$= \dfrac{(2m-1)m + 2k(2m-1) - (2m-1) - 1}{2m-1} = m+2k-1-\dfrac{1}{2m-1}$, то есть не целое число.

Ответ: а) нет; б) нет; в) да; г) да.

Решение варианта № 27

1. Стоимость 28 тетрадей — $28 \cdot 40$ руб. Так как покупатель получит скидку 10%, то стоимость покупки со скидкой равна $0{,}9 \cdot 28 \cdot 40 = 1008$ (руб.)

Ответ: 1008.

2. Подсчитаем количество точек, лежащих на горизонтальной оси: таких точек 5.

Ответ: 5.

3. $S_{ABC} = S_{AKMN} - S_{AKB} - S_{BMC} - S_{ACN} = 40 - 10 - 4 - 12 = 14$ (см. рис. 129).

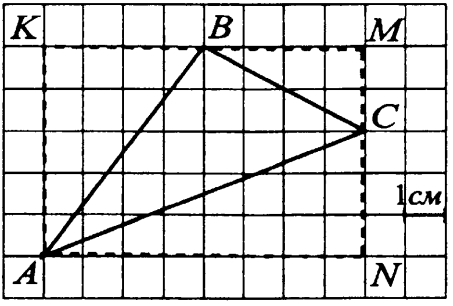


Рис. 129

Ответ: 14.

4. Всего возможностей при бросании двух игральных костей 36: 6 для первой кости и 6 для второй (по правилу произведения). Перечислим возможности выпадения 7 очков на двух костях: (1; 6), (6; 1), (2; 5), (5; 2), (3; 4), (4; 3). Таких возможностей 6. Вероятность того, что сумма выпавших очков — 7, равна $\dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6} = 0{,}166\ldots \approx 0{,}17$.

Ответ: 0,17.

5. $5^{\log_{25}(4x-19)} = 9$, $5^{\log_{5^2}(4x-19)} = 9$, $5^{\frac{1}{2}\log_5(4x-19)} = 9$, $5^{\log_5\sqrt{4x-19}} = 9$, $\sqrt{4x-19} = 9$, $4x - 19 = 81$, $4x = 100$, $x = 25$.

Ответ: 25.

6. Данные углы не являются противоположными, так как их сумма не равна 180°. Больший из оставшихся углов найдём как $180° - 66° = 114°$.

Ответ: 114.

7. Проведём касательные в отмеченных точках (см. рис. 130). Угловой коэффициент касательной в точке $x = -4$ наибольший.

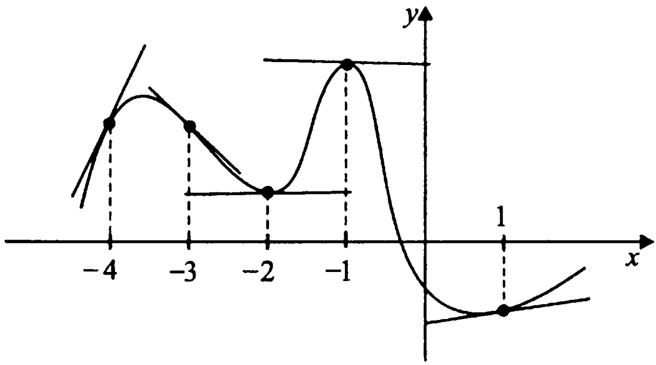


Рис. 130

Ответ: −4.

8. Пусть V_1— объём первого шара, R_1 — его радиус, V_2 — объём второго шара, R_2 — его радиус. По условию $V_1 = 8000V_2$. Нужно найти $\frac{4\pi R_1^2}{4\pi R_2^2} = \frac{R_1^2}{R_2^2}$, то есть отношение квадратов радиусов. $V_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3$, $V_2 = \frac{4}{3}\pi R_2^3$, $\frac{4}{3}\pi R_1^3 = 8000\frac{4}{3}\pi R_2^3$, тогда $\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 = 8000$, откуда $\frac{R_1}{R_2} = 20$, $\frac{R_1^2}{R_2^2} = 400$.

Ответ: 400.

9. $25^{\log_5 8} = 5^{2\log_5 8} = 5^{\log_5 8^2} = 64$.

Ответ: 64.

10. По условию $\lambda = 420$ нм, $k = 3$, $d \leqslant 2520$ нм, $\varphi > 0$.

$d\sin\varphi = k\lambda$, $\frac{3 \cdot 420}{\sin\varphi} \leqslant 2520$, $\frac{1}{\sin\varphi} \leqslant 2$, $\sin\varphi \geqslant \frac{1}{2}$.

Наименьшее $\varphi = 30°$.

Ответ: 30.

11. В 20 кг сушёного инжира 97,5% не воды, значит,

20 кг — 100%

x кг — 97,5%

Тогда сухого вещества в 20 кг сушёного инжира $\frac{20 \cdot 97{,}5}{100} = 19{,}5$ кг. А в свежем инжире сухого вещества 25%, то есть одна четвёртая часть. Значит, чтобы найти, сколько килограммов свежих плодов потребуется для получения 20 кг сушёного инжира, нужно 19,5 умножить на 4: $19{,}5 \cdot 4 = 78$ кг.

Ответ: 78.

12. $y' = 4 - 8\sin x = 4(1 - 2\sin x)$.

Найдём стационарные точки из условия $y' = 0$, учитывая, что $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\pi}{6}$ (см. рис. 131).

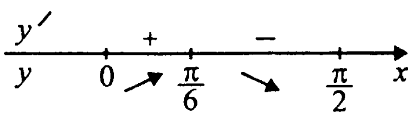


Рис. 131

Наибольшее значение функции будет в точке $x = \frac{\pi}{6}$:

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4\cdot\frac{\pi}{6}+8\cos\frac{\pi}{6}-4\sqrt{3}-17-\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}+4\sqrt{3}-4\sqrt{3}-17-\frac{2\pi}{3} = -17.$$

Ответ: -17.

13. По определению логарифма получаем равносильное уравнение

$3\sin 2x - 3\sin x - 2\cos x + 5 = 4;$

$6\sin x\cos x - 3\sin x - 2\cos x + 1 = 0;$

$3\sin x(2\cos x - 1) - (2\cos x - 1) = 0;$

$(2\cos x - 1)(3\sin x - 1) = 0;$

$2\cos x - 1 = 0$ или $3\sin x - 1 = 0;$

$\cos x = \frac{1}{2}$ или $\sin x = \frac{1}{3};$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$ или $x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{3} + \pi k,\ k \in Z.$

б) С помощью числовой окружности отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$ (см. рис. 132).

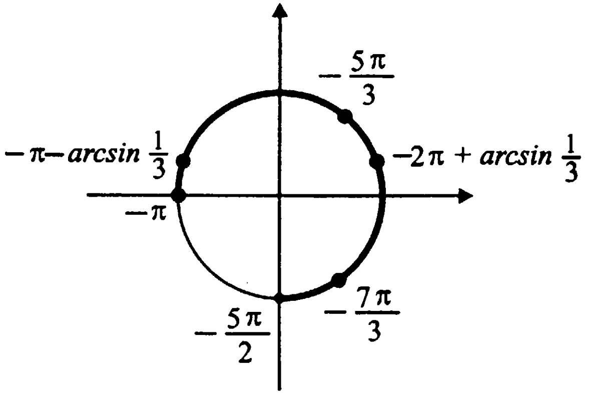


Рис. 132

Это числа $-\frac{7\pi}{3}$; $\frac{-5\pi}{3}$; $-2\pi+\arcsin\frac{1}{3}$; $-\pi-\arcsin\frac{1}{3}$.

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$; $(-1)^k\arcsin\frac{1}{3}+\pi k,\ k\in Z$; б) $-\frac{7\pi}{3}$; $-\frac{5\pi}{3}$; $-2\pi+\arcsin\frac{1}{3}$; $-\pi-\arcsin\frac{1}{3}$.

14. а) Точки N и P лежат в плоскости CC_1D_1 (см. рис. 133).

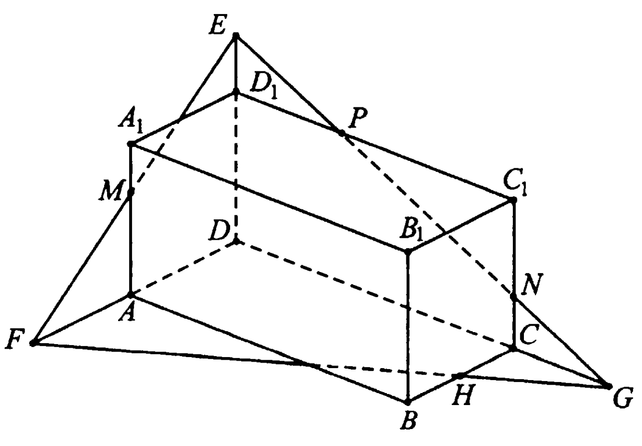


Рис. 133

Проведём прямую NP, получим две точки: E — точка пересечения NP и DD_1, G — точка пересечения NP и CD. Точки E и M лежат в плоскости ADD_1. Проведём прямую EM, получим точку F — точку пересечения EM и AD. Точки F и G лежат в плоскости ABC. Проведём прямую FG, получим H как точку пересечения FG и BC.

б) Пусть $AB = 3x$, $AD = 3y$, $AA_1 = 3z$, тогда $PD_1 = x$, $PC_1 = 2x$, $NC = z$, $NC_1 = 2z$. Из подобия треугольников PNC_1 и PD_1E получаем $D_1E = z$, $DE = 4z$. Из подобия треугольников EDG и ED_1P получаем $DG = 4x$, $CG = x$. Так как $AM = 2z$, то из подобия треугольников EDF и MAF получаем $FA = AD = 3y$, $FD = 6y$. Из подобия треугольников FDG и HCG получаем $\frac{FD}{HC} = \frac{DG}{CG}$ или $\frac{6y}{HC} = \frac{4x}{x}$. Отсюда $HC = 1{,}5y$.

Значит, $\frac{BH}{BC} = \frac{1{,}5y}{3y} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $1 : 2$.

15. Пусть $|\log_2 x - 4| = t$, тогда получаем неравенство $t \geqslant 3 + \frac{1}{5-t}$.

Преобразуем последнее неравенство: $3 - t + \frac{1}{5-t} \leqslant 0$; $\frac{t^2 - 8t + 16}{5-t} \leqslant 0$; $\frac{(t-4)^2}{5-t} \leqslant 0$. Используя метод интервалов, найдем решения неравенства с переменной t: $t = 4$ или $t > 5$. Отсюда $|\log_2 x - 4| = 4$ или $|\log_2 x - 4| > 5$. Пусть $\log_2 x = a$, решим уравнение и неравенство с модулем. Из уравнения $|a-4| = 4$ получаем $\left[\begin{array}{l} a - 4 = 4, \\ a - 4 = -4; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 8, \\ a = 0. \end{array}\right.$ Далее, $\left[\begin{array}{l} \log_2 x = 8, \\ \log_2 x = 0; \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 256, \\ x = 1. \end{array}\right.$ Модуль $|a-4|$ есть расстояние на координатной оси от точки a до точки 4. Для решения неравенства $|a - 4| > 5$ необходимо найти такие точки, расстояние от которых до точки 4 больше 5. Справа от точки 4 на расстоянии 5 единиц расположена точка 9, а слева — точка (-1). Поэтому из неравенства $|a - 4| > 5$ получаем $\left[\begin{array}{l} a < -1, \\ a > 9. \end{array}\right.$

Далее $\left[\begin{array}{l} \log_2 x < -1, \\ \log_2 x > 9; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x < \log_2 \frac{1}{2}, \\ \log_2 x > \log_2 512; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < \frac{1}{2}, \\ x > 512. \end{array}\right.$.

Ответ: $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \{1; 256\} \cup (512; +\infty)$.

16. а) Выполняются следующие равенства (см. рис. 134):

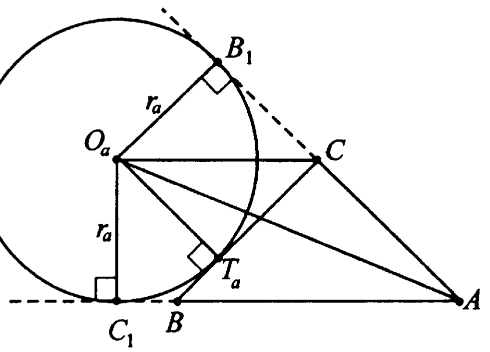


Рис. 134

$$S_{ABC} = S_{O_aCA} + S_{O_aBA} - S_{O_aCB} = \frac{1}{2} O_aB_1 \cdot AC + \frac{1}{2} O_aC_1 \cdot AB - \frac{1}{2} O_aT_a \cdot BC =$$

$$= \frac{1}{2} r_a AC + \frac{1}{2} r_a AB - \frac{1}{2} r_a BC = r_a(p - BC).$$

Отсюда получаем $r_a = \dfrac{S}{p - BC}$.

б) Пусть AD — высота равнобедренного треугольника ABC, опущенная на основание BC, O — центр вписанной окружности, E — точка её касания с боковой стороной AC (см. рис. 135). Тогда AD является биссектрисой и высотой и O принадлежит AD, OD — радиус вписанной окружности. Тогда $AO = 25 - 12 = 13$.

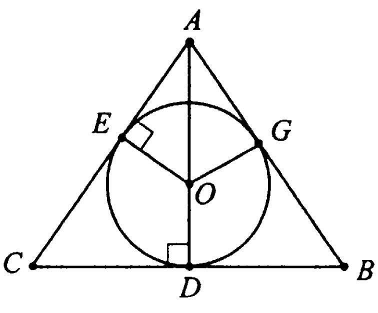


Рис. 135

Треугольник AOE прямоугольный, $AE = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$. Треугольники AOE и ACD подобны по двум углам, поэтому $\dfrac{AO}{AC} = \dfrac{OE}{CD} = \dfrac{AE}{AD}$

или $\frac{13}{AC} = \frac{12}{CD} = \frac{5}{25}$. Отсюда $CD = 60$ и $AC = 65$, значит, $BC = 120$.

Площадь треугольника $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 25 = 1\,500$.

Так как полупериметр треугольника ABC равен $p = AC + CD = 65 + 60 = 125$, то радиус вневписанной окружности, касающейся основания BC, равен $\frac{S}{p - BC} = \frac{1\,500}{125 - 120} = 300$.

Ответ: 300.

17. а) Если на момент окончания договора вклад составляет S долларов, то через год он будет составлять $S\left(1 + \frac{d}{100}\right)$ долларов или $K_1 \cdot S\left(1 + \frac{d}{100}\right)$ рублей. Сумма вклада на момент перехода на рублёвый депозит составляет $K_0 S$ рублей, а после уплаты комиссионных $K_0 \cdot S\left(1 - \frac{\alpha}{100}\right)$ рублей. Через год после начисления $r\%$ сумма станет равна $K_0 \cdot S\left(1 - \frac{\alpha}{100}\right)\left(1 + \frac{r}{100}\right)$ рублей. Тогда условие целесообразности перевода валютного вклада S на годовой рублёвый депозит будет иметь следующий вид $K_0 \cdot S\left(1 - \frac{\alpha}{100}\right)\left(1 + \frac{r}{100}\right) > K_1 \cdot S\left(1 + \frac{d}{100}\right)$ или $K_0\left(1 - \frac{\alpha}{100}\right)\left(1 + \frac{r}{100}\right) > K_1\left(1 + \frac{d}{100}\right)$.

б) Подставим данные числа в левую и правую части последнего неравенства $63(1 - 0{,}007)(1 + 0{,}12) = 70{,}06608$; $64(1 + 0{,}09) = 69{,}76$. Отсюда следует, что рублёвый депозит через год будет больше, чем валютный после продления на год валютного вклада.

Ответ: а) $K_0\left(1 - \frac{\alpha}{100}\right)\left(1 + \frac{r}{100}\right) > K_1\left(1 + \frac{d}{100}\right)$. б) Деньги лучше переложить.

18. Перепишем систему неравенств $\begin{cases} x^2 - (2a + 4)x + a^2 + 4a + 3 > 0, \\ x^2 - (3a - 1)x + 2a^2 + a - 6 \leqslant 0. \end{cases}$

Уравнение $x^2 - (3a - 1)x + 2a^2 + a - 6 = 0$ имеет корни $x_1 = 2a - 3$ и $x_2 = a + 2$, поэтому второе неравенство системы имеет решения $\min\{x_1; x_2\} \leqslant x \leqslant \max\{x_1; x_2\}$.

Уравнение $x^2-(2a+4)x+a^2+4a+3=0$ имеет корни $x_3=a+1$ и $x_4=a+3$, поэтому первое неравенство системы имеет решения $x<x_3$ или $x>x_4$. Так как $a+1<a+2<a+3$, то $x_3<x_2<x_4$. Система неравенств имеет решения, если $x_1<x_3$ или $x_1>x_4$.

$2a-3<a+1$ или $2a-3>a+3$, то есть $a<4$ или $a>6$.

Значит, исходная система неравенств имеет хотя бы одно решение при $a\in(-\infty;4)\cup(6;+\infty)$.

Ответ: $a\in(-\infty;4)\cup(6;+\infty)$.

19. а) Например, 1 452. Возможны и другие примеры.

б) Например, 257 764. Возможны и другие примеры.

в) Пусть $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ — десятичная запись числа, каждая цифра которого, кроме первой и последней, больше среднего арифметического соседних с ней цифр. Тогда $a_i>\frac{a_{i-1}+a_{i+1}}{2}$; $2a_i>a_{i-1}+a_{i+1}$; $a_{i-1}-a_i<a_i-a_{i+1}$, где $i=2,3,\ldots,n-1$. Таким образом, $a_1-a_2<a_2-a_3<\ldots<a_{n-1}-a_n$.

Отсюда следует, что только первые три разности могут быть отрицательными. Так как, если предположить, что первые четыре разности отрицательны, то разность $a_1-a_5=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+(a_3-a_4)+(a_4-a_5)\leqslant$ $\leqslant(-4)+(-3)+(-2)+(-1)=-10$, что невозможно.

Аналогично только три последние разности $a_{n-3}-a_{n-2}$, $a_{n-2}-a_{n-1}$ и $a_{n-1}-a_n$ могут быть положительными.

Таким образом, в числе не может быть более 7 разностей (три отрицательных, одна, равная нулю, и три положительных), то есть число содержит 8 цифр $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$ с разностями $a_1-a_2=-3$, $a_2-a_3=-2$, $a_3-a_4=-1$, $a_4-a_5=0$, $a_5-a_6=1$, $a_6-a_7=2$, $a_7-a_8=3$.

Чтобы искомое число было наибольшим, нужно выбрать цифру старшего разряда наибольшей. Чтобы a_1 было наибольшей из допустимых, необходимо наибольшими выбрать цифры $a_4=a_5=9$. Тогда $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}=36899863$.

Ответ: а) 1 452, б) 257 764, в) 36 899 863.

Решение варианта № 28

1. Стоимость покупки без скидки равна $16\cdot20$ рублей. Стоимость покупки со скидкой равна $0{,}85\cdot16\cdot20=272$ рубля.

Ответ: 272.

2. Подсчитаем количество точек, ординаты которых равны нулю. Таких точек за указанный период 4.

Ответ: 4.

3. Найдём AB по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ABF (см. рис. 136).

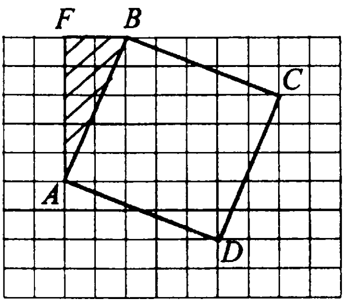


Рис. 136

$AB^2 = AF^2 + FB^2$
$AB^2 = 25 + 4 = 29$
$S_{ABCD} = AB^2 = 29.$

Ответ: 29.

4. Число способов выпадения трёх игральных костей находим по правилу произведения: $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$. Сумма выпавших очков равна 5 в следующих случаях: $(1;1;3)$, $(1;3;1)$, $(3;1;1)$, $(1;2;2)$, $(2;1;2)$, $(2;2;1)$. Таких случаев 6. Значит, вероятность того, что при бросании игральной кости сумма выпавших очков — 5, равна $\frac{6}{216} = \frac{1}{36} = 0{,}027\ldots \approx 0{,}03$.

Ответ: 0,03.

5. $4^{\log_{16}(7x-6)} = 8$, $4^{\log_{4^2}(7x-6)} = 8$, $4^{\frac{1}{2}\log_4(7x-6)} = 8$, $\sqrt{7x-6} = 8$, $7x - 6 = 64$, $7x = 70$, $x = 10$.

Ответ: 10.

6. Данные углы не являются противоположными, так как их сумма не равна 180°. Для нахождения большего из оставшихся углов нужно из 180° вычесть меньший из данных углов: $180° - 56° = 124°$.

Ответ: 124.

7. Из отмеченных точек только одна точка $x = -4$ принадлежит промежутку убывания функции, то есть в $f'(-4) < 0$, в остальных точках $f'(x) \geqslant 0$. Значит, наименьшее значение производной в точке $x = -4$.

Ответ: -4.

8. Пусть a — ребро большего куба, b — меньшего. По условию $a^3 = 343b^2$. Нужно найти $\frac{6a^2}{6b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$.

$\frac{a^3}{b^3} = 343$, $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = 7^3$, $\frac{a}{b} = 7$, значит, $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 49$.

Ответ: 49.

9. $49^{\log_7 2} = (7^2)^{\log_7 2} = 7^{\log_7 2^2} = 4$.

Ответ: 4.

10. По условию $\lambda = 441$ нм, $\varphi > 0$, $k = 3$, $d \leqslant 2646$ нм.

$d \sin\varphi = k\lambda$, $\frac{3 \cdot 441}{\sin\varphi} \leqslant 2646$, $\frac{1}{\sin\varphi} \leqslant 2$, $\sin\varphi \geqslant \frac{1}{2}$.

$\varphi = 30°$.

Минимальное значение φ — $30°$.

Ответ: 30.

11. В 10 кг сушёного инжира 96,6% не воды, то есть 9,66 кг. В свежем инжире это 30%. Тогда

9,66 кг — 30%
x кг — 100%

$x = \frac{966}{30} = 32{,}2$, где x — масса свежего инжира, который потребуется для получения 10 кг сушёного инжира.

Ответ: 32,2.

12. $y' = 5\sqrt{3} - 10\sin x = 5(\sqrt{3} - 2\sin x)$.

Найдём стационарные точки, учитывая, что $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = \frac{2\pi}{3}$ (см. рис. 137).

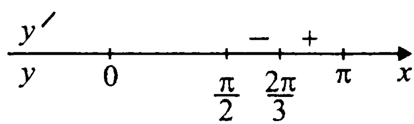


Рис. 137

Наименьшее значение функции в точке $x = \frac{2\pi}{3}$:

$$y\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 5\sqrt{3}\cdot\frac{2\pi}{3} + 10\cos\frac{2\pi}{3} - \frac{10\sqrt{3}\pi}{3} + 14 = \frac{10\sqrt{3}\pi}{3} - 5 - \frac{10\sqrt{3}\pi}{3} + 14 = 9.$$

Ответ: 9.

13. а) $\log_2(4\sin 2x + 4\cos x - 2\sin x + 7) = 3$;

$4\sin 2x + 4\cos x - 2\sin x + 7 = 8$;

$8\sin x \cdot \cos x - 2\sin x + 4\cos x - 1 = 0$;

$2\sin x(4\cos x - 1) + 4\cos x - 1 = 0$;

$(4\cos x - 1)(2\sin x + 1) = 0$;

$\cos x = \frac{1}{4}$ или $\sin x = -\frac{1}{2}$;

$x = \pm\arccos\frac{1}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$ или

$x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k = (-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{2} + \pi k = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3}{2}\pi; 3\pi\right]$ (см. рис. 138).

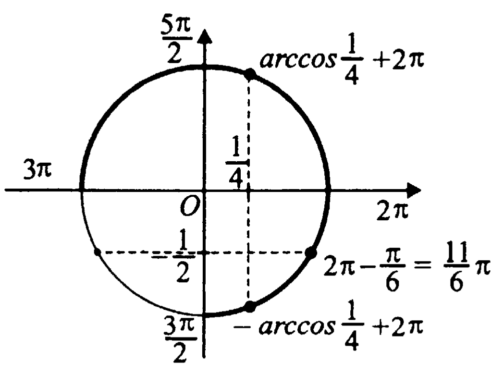


Рис. 138

Ответ: а) $\pm\arccos\frac{1}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$; $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$;

б) $\frac{11}{6}\pi$; $\pm\arccos\frac{1}{4} + 2\pi$.

14. а) Точки N и P лежат в плоскости CC_1D_1 (см. рис. 139). Проведём прямую NP и получим две точки: E — точка пересечения NP и DD_1, G — точка пересечения NP и CD.

Точки E и M лежат в плоскости ADD_1. Проведём прямую EM и получим точку F — точку пересечения EM и AD.

Точки F и G лежат в плоскости нижнего основания ABC. Проведём прямую FG и получим точку K — точку пересечения FG и AB.

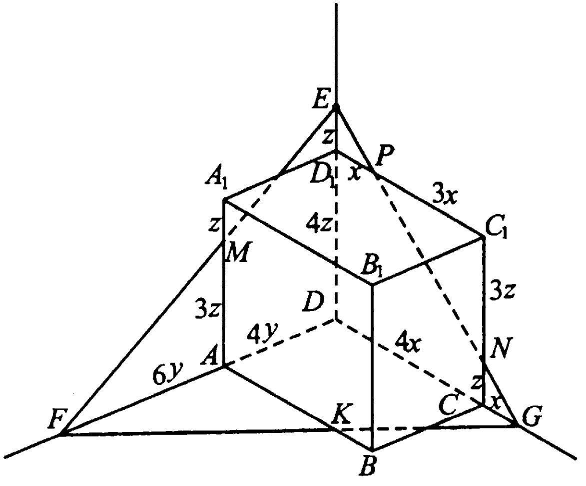


Рис. 139

б) Пусть $AB = 4x$, $AD = 4y$, $AA_1 = 4z$.

Тогда $PD_1 = x$, $PC_1 = 3x$, $NC = z$, $NC_1 = 3z$.

Так как $\triangle PNC_1 \sim \triangle GCN$ то $\dfrac{CG}{z} = \dfrac{3x}{3z}$; $CG = x$.

Значит, $DG = DC + CG = 4x + x = 5x$.

Так как $\triangle ED_1P \sim \triangle NCG$, то $\dfrac{ED_1}{x} = \dfrac{z}{x}$; $ED_1 = z$.

Так как $\triangle MAF \sim \triangle EDF$, то $\dfrac{FD}{5z} = \dfrac{FA}{3z}$; $FA + 4y = \dfrac{5}{3}FA$; $\dfrac{2}{3}FA = 4y$; $FA = 6y$.

Так как $\triangle FAK \sim \triangle FDG$, то $\dfrac{AK}{6y} = \dfrac{5x}{10y}$; $AK = 3x$.

Тогда $KB = AB - AK = 4x - 3x = x$.

Значит, $\dfrac{AK}{KB} = \dfrac{3x}{x} = 3$.

Ответ: $3 : 1$.

15. $|\log_2 x + 1| - \dfrac{1}{|\log_2 x + 1| - 2} \geqslant 2$.

Пусть $t = |\log_2 x + 1|$, $t \geqslant 0$. Тогда получаем неравенство: $t - \dfrac{1}{t-2} \geqslant 2$;

$t - \dfrac{1}{t-2} - 2 \geqslant 0$; $\dfrac{(t-1)(t-3)}{t-2} \geqslant 0$.

Решая это неравенство методом интервалов, получим $t \in [1; 2) \cup [3; +\infty)$ (см. рис. 140).

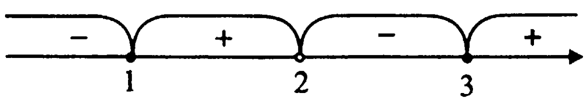


Рис. 140

Тогда, возвращаясь к переменной x, получим $\left[\begin{array}{l} 1 \leqslant |\log_2 x + 1| < 2, \\ |\log_2 x + 1| \geqslant 3. \end{array}\right.$

1) $|\log_2 x + 1| \geqslant 3$; $\left[\begin{array}{l} \log_2 x + 1 \geqslant 3, \\ \log_2 x + 1 \leqslant -3; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \log_2 x \geqslant 2, \\ \log_2 x \leqslant -4; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x \geqslant 4, \\ 0 < x \leqslant 2^{-4}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x \geqslant 4, \\ 0 < x \leqslant \dfrac{1}{16}. \end{array}\right.$

2) $1 \leqslant |\log_2 x + 1| < 2$; $\left\{\begin{array}{l} |\log_2 x + 1| \geqslant 1, \\ |\log_2 x + 1| < 2; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \log_2 x + 1 \geqslant 1, \\ \log_2 x + 1 \leqslant -1; \end{array}\right. \\ -2 < \log_2 x + 1 < 2; \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \log_2 x \geqslant 0, \\ \log_2 x \leqslant -2; \end{array}\right. \\ -3 < \log_2 x < 1; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x \geqslant 1, \\ 0 < x \leqslant \dfrac{1}{4}; \end{array}\right. \\ \dfrac{1}{8} < x < 2; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 1 \leqslant x < 2, \\ \dfrac{1}{8} < x \leqslant \dfrac{1}{4}. \end{array}\right.$

Объединяя случаи 1) и 2), получим

$x \in \left(0; \dfrac{1}{16}\right] \cup \left(\dfrac{1}{8}; \dfrac{1}{4}\right] \cup [1; 2) \cup [4; +\infty)$.

Ответ: $\left(0; \dfrac{1}{16}\right] \cup \left(\dfrac{1}{8}; \dfrac{1}{4}\right] \cup [1; 2) \cup [4; +\infty)$.

16. а) Пусть L — точка пересечения прямой AT и вписанной окружности (см. рис. 141).

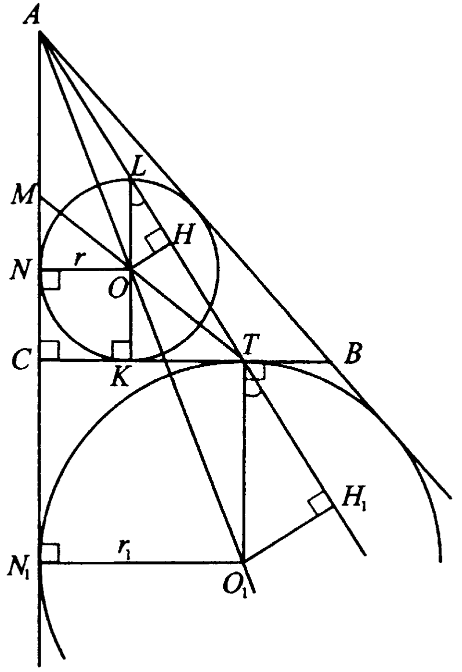


Рис. 141

$\triangle AON \sim \triangle AO_1N_1$ (оба прямоугольных треугольника имеют общий угол при вершине A). Значит, $\dfrac{AO}{AO_1} = \dfrac{ON}{O_1N_1} = \dfrac{r}{r_1}$, где r — радиус вписанной, а r_1 — радиус вневписанной окружностей.

Аналогично $\triangle AOH \sim \triangle AO_1H_1$.

Значит, $\dfrac{OH}{O_1H_1} = \dfrac{AO}{AO_1} = \dfrac{r}{r_1}$.

Тогда $\triangle LHO \sim \triangle TH_1O_1$ по соответственно пропорциональным катету и гипотенузе, так как $\dfrac{OH}{O_1H_1} = \dfrac{r}{r_1} = \dfrac{LO}{TO_1}$.

Следовательно, $\angle OLH = \angle O_1TH_1$. Отсюда $LO \parallel TO_1$, так как равны соответственные углы между LO, TO_1 и секущей AT. Но $TO_1 \perp BC$, поэтому $LO \perp BC$.

Так как и $OK \perp BC$, то LK — диаметр вписанной окружности и $LK \parallel AC$.

Таким образом, $\triangle LKT \sim \triangle ACT$. Но TO — медиана $\triangle LKT$. Значит, TM — медиана $\triangle ACT$, то есть $AM = MC$.

б) $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$;

$$p = \frac{AB + BC + AC}{2} = \frac{\sqrt{3^2 + 4^2} + 3 + 4}{2} = \frac{5 + 3 + 4}{2} = 6.$$

Тогда $CT = r_1 = \dfrac{S_{ABC}}{p - BC} = \dfrac{6}{6-3} = 2$;

$$S_{TMC} = \frac{1}{2} \cdot MC \cdot CT = \frac{1}{2} \cdot \frac{AC}{2} \cdot CT = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2.$$

Ответ: 2.

17. Пусть N — исходная сумма денег в долларах, планируемая для вклада. Тогда $N \cdot K_0$ — та же сумма в рублях на момент открытия вклада, а $1{,}17 \cdot N \cdot K_0$ — сумма в рублях, которую можно снять с рублёвого вклада под 17% годовых через 1 год.

Если N долларов положим на валютный вклад под 4% годовых на 1 год, то получим $1{,}04 \cdot N$ долларов после снятия вклада. Это составит $1{,}04 \cdot N \cdot K_1$ рублей. Чтобы рублёвый вклад был более выгодным, необходимо выполнение условия $1{,}17 \cdot N \cdot K_0 > 1{,}04 \cdot N \cdot K_1$.

Отсюда $K_1 < \dfrac{1{,}17}{1{,}04} \cdot K_0 = 1{,}125 \cdot 60 = 67{,}5$ (рублей за 1 доллар).

Ответ: $K_1 < 67{,}5$.

18. Перепишем систему $\begin{cases} x^2 - (3a-2)x + a^2 - 3a + 5 \geqslant 0, \\ x^2 - (3a-1)x + 2a^2 - 3a - 2 \leqslant 0. \end{cases}$

Уравнение $x^2 - (3a-1)x + 2a^2 - 3a - 2 = 0$ имеет корни $x_1 = 2a + 1$ и $x_2 = a - 2$, поэтому второе неравенство системы имеет решения $\min\{x_1; x_2\} \leqslant x \leqslant \max\{x_1; x_2\}$.

Пусть $f(x) = x^2 - (3a-2)x + a^2 - 3a + 5$. Рассмотрим обратную задачу: при каких значениях параметра a система неравенств не имеет решений?

Для этого должны выполняться условия

$$\begin{cases} f(x_1) < 0, \\ f(x_2) < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (2a+1)^2 - (3a-2)(2a+1) + a^2 - 3a + 5 < 0, \\ (a-2)^2 - (3a-2)(a-2) + a^2 - 3a + 5 < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a^2 + 2a + 8 < 0, \\ -a^2 + a + 5 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a \in (-\infty; -2) \cup (4; +\infty), \\ a \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{21}}{2}; +\infty\right); \end{cases}$$

$a \in (-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$.

Значит, исходная система неравенств имеет хотя бы одно решение при $a \in [-2; 4]$.

Ответ: $[-2; 4]$.

19. а) Например, 8 533. Возможны и другие примеры.

б) Например, 742 113. Возможны и другие примеры.

в) Пусть $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ — десятичная запись числа, каждая цифра которого, кроме первой и последней, меньше среднего арифметического соседних с ней цифр. Тогда $a_i < \dfrac{a_{i-1}+a_{i+1}}{2}$; $2a_i < a_{i-1} + a_{i+1}$;
$a_{i-1} - a_i > a_i - a_{i+1}$, где $i = 2, 3, \ldots, n-1$.
Таким образом, $a_1 - a_2 > a_2 - a_3 > \ldots > a_{n-1} - a_n$.

Отсюда следует, что только первые три разности могут быть положительными. Так как, если предположить, что первые четыре разности $a_1 - a_2$, $a_2 - a_3$, $a_3 - a_4$ и $a_4 - a_5$ положительны, то разность $a_1 - a_5 = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + (a_4 - a_5) \geqslant$
$\geqslant 4 + 3 + 2 + 1 = 10$, что невозможно.

Аналогично только три последние разности $a_{n-3} - a_{n-2}$, $a_{n-2} - a_{n-1}$ и $a_{n-1} - a_n$ могут быть отрицательными.

Таким образом, в числе не может быть более 7 разностей (три положительных, одна, равная нулю, и три отрицательных), то есть число содержит 8 цифр $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$ с разностями $a_1-a_2 = 3$, $a_2-a_3 = 2$, $a_3-a_4 = 1$, $a_4 - a_5 = 0$, $a_5 - a_6 = -1$, $a_6 - a_7 = -2$, $a_7 - a_8 = -3$.

Чтобы искомое число было наибольшим, нужно выбрать цифру старшего разряда наибольшей, то есть $a_1 = 9$.
Тогда $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8} = 96\,433\,469$.

Ответ: а) 8 533, б) 742 113, в) 96 433 469.

Решение варианта № 30

1. По условию 1 литр бензина стоит 34 рубля 80 копеек. Тогда суммарная стоимость 40 л бензина равна $40 \cdot 34{,}8 = 1392$ рублей, а суммарная стоимость всей покупки равна $1392 + 68 = 1460$ рублей. Значит, с 2000 рублей водитель получит $2000 - 1460 = 540$ рублей.

Ответ: 540.

2. Среди столбиков, соответствующих числам с 14 по 21 декабря, наиболее низкой отметки достигает столбик, соответствующий 16 числу. Он достигает отметки -9 °C.

Ответ: -9.

3. Сторона $AB = 50 - 12 = 38$. Противоположные стороны параллелограмма равны, поэтому $OC = AB = 38$. Так как точка O имеет ординату 0, точка C имеет ординату 38.

Ответ: 38.

4. Пусть в каждой игре выпадение решки означает, что команда «Самолёт» выиграла жребий. Всего есть 8 разных исходов (последовательность О — орлов и Р — решек): ООО, ООР, ОРО, ОРР, РОО, РОР, РРО, РРР. Указанному событию благоприятствуют три исхода: РРО, РОР, ОРР. По определению искомая вероятность равна $\frac{3}{8} = 0{,}375$.

Ответ: 0,375.

5. $\log_8(38 - 37x) = \log_8(4 - 5x) + \log_8 8$;
$\log_8(38-37x) = \log_8(4-5x)\cdot 8$; $38-37x = (4-5x)\cdot 8$; $38-37x = 32-40x$;
$3x = -6$; $x = -2$.

Проверка: $\log_8(38+37\cdot 2) = \log_8(4+5\cdot 2)+1$; $\log_8 112 = \log_8 14+\log_8 8$; $\log_8 112 = \log_8(14 \cdot 8)$ — верно.

Ответ: -2.

6. Из $\triangle AHC$ видно, что $\cos A = \frac{AH}{AC}$, следовательно,

$$AC = \frac{AH}{\left(\frac{1}{3}\right)} = 3AH = 21$$ (см. рис. 142).

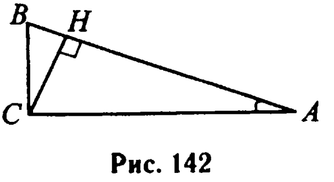


Рис. 142

Из $\triangle ABC$ получим, что $\cos A = \frac{AC}{AB}$, значит,

$$AB = \frac{AC}{\left(\frac{1}{3}\right)} = 3AC = 63.$$

Ответ: 63.

7. По формуле Ньютона-Лейбница значение $\Big(F(5) - F(1)\Big)$ равняется площади фигуры под графиком функции между вертикальными прямыми

$x = 1$ и $x = 5$, то есть равно площади трапеции $ABCD$ (см. рис. 143). Эта площадь равна $\dfrac{BC + AD}{2} \cdot AB = \dfrac{2+4}{2} \cdot 2 = 6$.

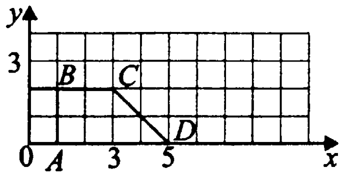


Рис. 143

Ответ: 6.

8. Рассмотрим рисунок 144.

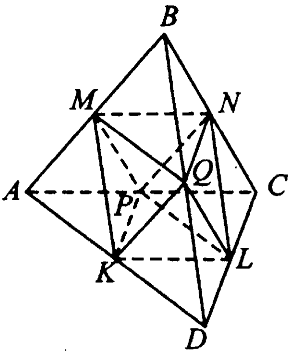


Рис. 144

В каждой грани тетраэдра проведены все три средние линии. Поэтому $\Delta MQK = \Delta NPL$ и $\Delta MQK \sim \Delta ABD$ с коэффициентом подобия $k = \frac{1}{2}$.

Тогда $S_{MQK} = S_{NPL} = \frac{1}{4} S_{ABD}$.

Аналогично $S_{MNQ} = S_{PKL} = \frac{1}{4} S_{ACD}$,

$S_{MNP} = S_{KQL} = \frac{1}{4} S_{ABC}$,

$S_{MPK} = S_{NQL} = \frac{1}{4} S_{BCD}$.

Следовательно, искомая величина равна $\frac{1}{2}$ площади поверхности тетраэдра: $\frac{1}{2} \cdot 862 = 431$.

Ответ: 431.

9. $\log_{12,5} + \log_5 10 = \log_5 125 = 3$.

Ответ: 3.

10. Из условия следует, что лампочка загорается, когда выполняется условие $10 \sin(\omega t + \varphi) \geqslant 5$; $\sin(\omega t + \varphi) \geqslant \frac{1}{2}$.

Сделаем замену $\psi = \omega t + \varphi$. Тогда на первой секунде $\psi \in [0°;\ 100°]$. Неравенство $\sin \psi \geqslant \frac{1}{2}$ будет выполнено при $\psi \in [30°;\ 100°]$, то есть $30° \leqslant \omega t + \varphi \leqslant 100°$, $30 \leqslant 100t \leqslant 100$, $0{,}3 \leqslant t \leqslant 1$, $t \in [0{,}3;\ 1]$. Длина отрезка $[0{,}3;\ 1]$ равна 0,7, что составляет 70% от 1 с.

Ответ: 70.

11. Из условия вытекает, что количество ежедневно прочитываемых страниц образует арифметическую прогрессию $a_1, a_2, \ldots, a_{16}$, при этом $a_1 = 12$. По формуле суммы арифметической прогрессии имеем $a_1 + a_2 + \ldots + a_{16} = \frac{a_1 + a_{16}}{2} \cdot 16 = 672$. Следовательно, $a_1 + a_{16} = 84$ и $a_{16} = 84 - 12 = 72$.

Ответ: 72.

12. Найдём производную функции $y = (x+4)^2(x-11) - 76$, получим

$$y'(x) = \left((x+4)^2\right)'(x-11) + (x+4)^2(x-11)' + 0 =$$
$$= 2(x+4)(x-11) + (x+4)^2 \cdot 1 = (x+4)(2x-22+x+4) = 3(x+4)(x-6).$$

Таким образом, $y'(x) = 0$ при $x = -4$ и $x = 6$. Кроме того, $y'(x) > 0$ при $x < -4$ и $x > 6$ (на этих промежутках $y(x)$ возрастает) и $y'(x) < 0$ при $-4 < x < 6$ (на этом промежутке $y(x)$ убывает).

Таким образом, $x = 6$ — точка минимума.

Ответ: 6.

13. а) Используя основное тригонометрическое тождество и формулу косинуса двойного аргумента, получим уравнение $\cos^2 x = 2\sin^2 x$, которое равносильно уравнению $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{2}$. Получим два уравнения:

1) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и первую серию корней $x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi n$, где $n \in Z$;

2) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и вторую серию корней $x = -\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k$, где $k \in Z$.

б) На рисунке 145 изображена числовая окружность, на которой выделена дуга от $-\frac{3\pi}{2}$ до 0. Промежутку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$ принадлежат три корня. $x_3 = -\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_1 = -\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} - \pi$, $x_2 = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} - \pi$.

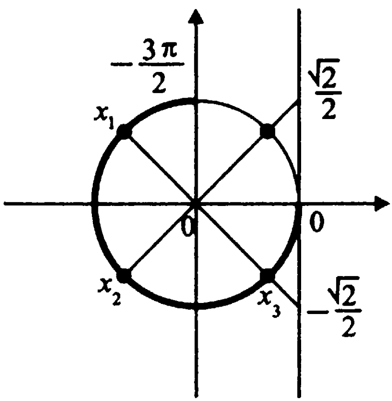


Рис. 145

Ответ: а) $\pm\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k$, где $k \in Z$; б) $-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} - \pi$; $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} - \pi$; $-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$.

14. а) Прямые B_1E_1 и BE параллельны, поэтому угол между прямыми BE и A_1D_1 равен углу между прямыми B_1E_1 и A_1D_1, а он равен 60°, потому что угол между диагоналями правильного шестиугольника равен 60°.

б) Заметим, что параллелепипед $ABB_1A_1EDD_1E_1$ является правильной призмой. Рассмотрим двугранный угол EA_1BD_1 и его линейный угол EOD_1, где O — точка пересечения диагоналей квадрата ABB_1A_1 (см. рис. 146).

С помощью теоремы Пифагора можно найти высоту $AE = \sqrt{3}$ параллелепипеда, диагональ $ED_1 = \sqrt{2}$ основания и отрезок $OE = \sqrt{AE^2 + AO^2} = \frac{\sqrt{14}}{2}$. Из равенства треугольников A_1BE

и A_1BD_1 следует, что треугольник EOD_1 является равнобедренным $OE = OD_1 = \frac{\sqrt{14}}{2}$ с основанием $ED_1 = \sqrt{2}$.

Применяя теорему косинусов $ED_1^2 = EO^2 + OD_1^2 - 2EO \cdot OD_1 \cos \angle O$, найдём $\cos EOD_1 = \frac{5}{7}$, значит, угол между плоскостями A_1BE и A_1BD_1 равен $\arccos \frac{5}{7}$.

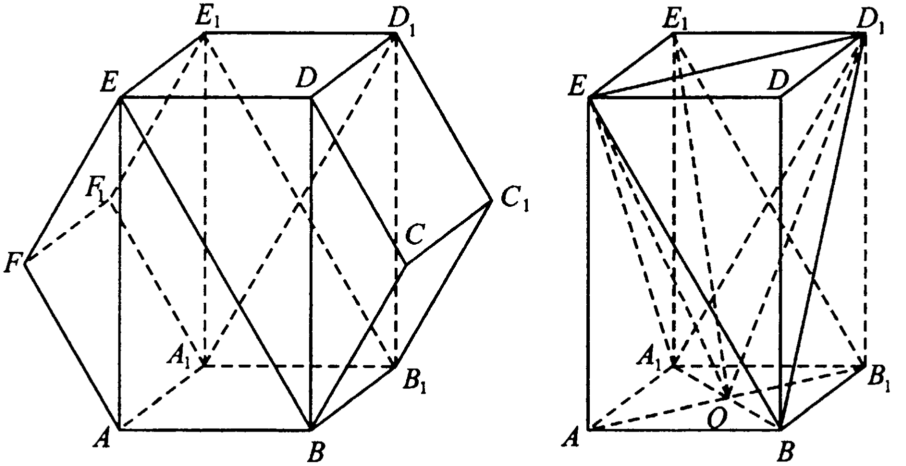


Рис. 146

Ответ: $\arccos \frac{5}{7}$.

15. Очевидно, что $x > 0$. Заметим, что $\log_3 x < 3^x$ при любом x, поэтому знаменатель дроби принимает только отрицательные значения.

Умножив обе части неравенства на $\log_3 x - 3^x$, получим неравенство $9^x + \log_3 x - 20 \leqslant \log_3 x - 3^x$, которое сводится к неравенству $9^x + 3^x - 20 \leqslant 0$. Решив его методом подстановки, найдём все его решения $x \leqslant \log_3 4$. Учитывая, что $x > 0$, получим все решения данного неравенства: $x \in (0; \log_3 4]$.

Ответ: $(0; \log_3 4]$.

16. а) Высоту CH треугольника ABC можно найти по теореме Пифагора, она равна 8. Тогда площадь треугольника ABC равна 48, периметр равен 32, радиус вписанной окружности равен $r = \frac{2S}{P} = \frac{2 \cdot 48}{32} = 3$ (см. рис. 147).

б) Треугольники ABC и $O_1O_2O_3$ подобны, потому что их соответственные стороны параллельны. Учитывая, что отношение площадей $S_{ABC} : S_{O_1O_2O_3} = k^2$ и площадь треугольника $O_1O_2O_3$ равна трети площади треугольника ABC, получим, что $k = \sqrt{3}$. Коэффициент подобия $k = \frac{AB}{O_1O_2} = \sqrt{3}$, поэтому $O_1O_2 = 4\sqrt{3}$.

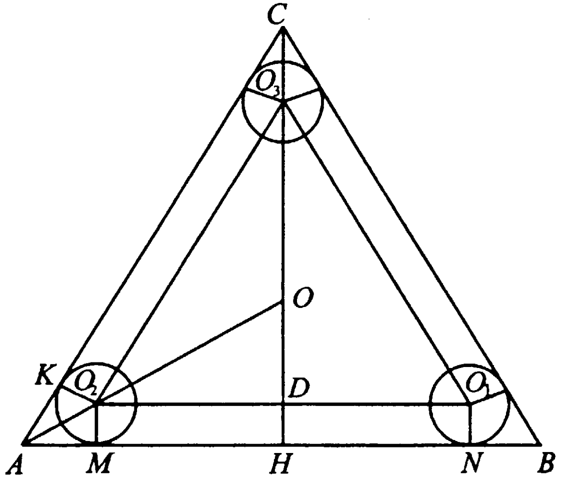


Рис. 147

Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, тогда $OH = 3$. O и O_2 лежат на биссектрисе угла A. Отрезок O_2M — радиус, проведённый в точку касания со стороной AB. Треугольники AOH и O_2OD подобны по двум углам, поэтому их стороны пропорциональны: $\frac{OH}{OD} = \frac{AH}{O_2D}$; $\frac{3}{3-r} = \frac{6}{2\sqrt{3}}$; $r = 3 - \sqrt{3}$.

Ответ: а) 3; б) $3 - \sqrt{3}$.

17. Пусть в пчелином улье после зимовки сохранилось N пчёл, тогда в улье стало:

через 1 месяц $1{,}6N - 1000$ пчёл;

через 2 месяца $1{,}6(1{,}6N - 1\,000) - 1\,000$ пчёл;

через 3 месяца $1{,}6(1{,}6(1{,}6N - 1\,000) - 1\,000) - 1\,000$ пчёл;

через 4 месяца $1{,}6(1{,}6(1{,}6(1{,}6N - 1\,000) - 1\,000) - 1\,000) - 1\,000$ пчёл.

Исходя из условия задачи, составим и решим уравнение:
$1{,}6(1{,}6(1{,}6(1{,}6N - 1\,000) - 1\,000) - 1\,000) - 1\,000 = 56\,280$;
$1{,}6(1{,}6(1{,}6N - 1\,000) - 1\,000) - 1\,000 = 35\,800$;
$1{,}6(1{,}6N - 1\,000) - 1\,000 = 23\,000$;
$1{,}6N - 1000 = 15\,000$;
$N = 10\,000$.

Значит, в пчелином улье после зимовки сохранилось 10 000 пчёл.

Ответ: 10 000.

18. Если $x \geqslant 0$, то уравнение $(|x| - 10)^2 + (y - 5)^2 = 10$ задаёт окружность с центром $C_2(10; 5)$ и радиусом $\sqrt{10}$. Если $x < 0$, то это уравнение задаёт окружность с центром $C_1(-10; 5)$ и радиусом $\sqrt{10}$.

Второе уравнение $y = a|x - 4| - 3$ системы задаёт переменный угол с вершиной $(4; -3)$, для которого прямая $x = 4$ является осью симметрии (см. рис. 148).

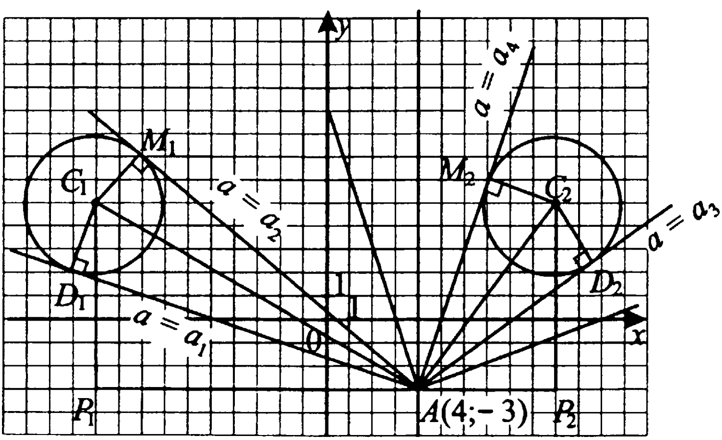


Рис. 148

Графики этих уравнений имеют единственную общую точку тогда, когда одна сторона угла касается одной из окружностей, а вторая сторона этого угла не имеет с окружностями общей точки.

Рассмотрим случай, когда левая ветвь графика $y = a|x - 4| - 3$, то есть прямая $y = -ax + 4a - 3$, касается окружности с центром C_1 (см. рис. 148).

Из ΔAC_1D_1 найдём $\operatorname{tg}\angle C_1AP_1 = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$. Рассмотрим ΔC_1D_1A, $C_1D_1 = \sqrt{10}$, $C_1A = \sqrt{14^2+8^2} = \sqrt{260}$. Тогда по теореме Пифагора $D_1A = \sqrt{260-10} = 5\sqrt{10}$ и $\operatorname{tg}\angle C_1AD_1 = \frac{C_1D_1}{AD_1} = \frac{1}{5}$. При этом $\operatorname{tg}\angle M_1AC_1 = \operatorname{tg}\angle C_1AD_1 = \frac{1}{5}$.

Тогда $a_1 = \operatorname{tg}(\angle C_1AP_1 - \angle C_1AD_1) = \dfrac{\frac{4}{7}-\frac{1}{5}}{1-\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{5}} = \frac{1}{3}$;

$a_2 = \operatorname{tg}(\angle C_1AP_1 + \angle C_1AD_1) = \dfrac{\frac{4}{7}+\frac{1}{5}}{1-\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{5}} = \frac{27}{31}$. При этом, если $\frac{1}{3} < a < \frac{27}{31}$, то левая ветвь графика функции $y = a|x-4|-3$ пересекает график окружности с центром C_1 в двух точках, а если $a < \frac{1}{3}$ или $a > \frac{27}{31}$, то левая ветвь не пересекает указанную окружность.

Рассмотрим случай, когда правая ветвь графика $y = a|x-4|-3$, то есть прямая $y = ax-4a-3$, касается окружности с центром C_2 (см. рис. 148). Из ΔC_2AP_2 найдём $\operatorname{tg}\angle C_2AP_2 = \frac{C_2P_2}{AC_2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$, $C_2D_2 = \sqrt{10}$, $AC_2 = \sqrt{64+36} = 10$. Тогда $C_2D_2 = \sqrt{100-10} = 3\sqrt{10}$ и $\operatorname{tg}\angle M_2AC_2 = \operatorname{tg}\angle C_2AD_2 = \frac{1}{3}$.

Значит, $a_3 = \operatorname{tg}(\angle C_2AP_2 - \angle C_2AD_2) = \dfrac{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}{1+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{9}{13}$;

$a_4 = \operatorname{tg}(\angle C_2AP_2 + \angle C_2AD_2) = \dfrac{\frac{4}{3}+\frac{1}{3}}{1-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}} = 3$. При этом, если

$\frac{9}{13} < a < 3$, то правая ветвь графика функции $y = a|x-4| - 3$ пересекает график окружности с центром C_2 в двух точках, а если $a < \frac{9}{13}$ или $a > 3$, то правая ветвь не пересекает указанную окружность.

В заключение отметим, что $\frac{1}{3} < \frac{9}{13} < \frac{27}{31} < 3$ и исходная система имеет единственное решение при $a = \frac{1}{3}$ и при $a = 3$.

Ответ: $\frac{1}{3}$; 3.

19. а) Очевидно, что сумма 48 чисел $(-23-22-\ldots-1+0+1+\ldots$ $\ldots+22+23)+24$ равна 24, и понятно, что 0 записан на 24-й странице тетради.

б) Если 0 записан на первой странице, то сумма 48 чисел $0+1+2+3+\ldots+46+47$ равна 1 128. В этом нетрудно убедиться, используя формулу сумму n первых членов арифметической прогрессии.

в) Рассмотрим таблицу, в первой строке которой записаны номера страниц по фабричной нумерации, а во второй строке номерá, записанные девочкой.

1	2	...	k	$k+1$	$k+2$	...	$2k$	$2k+1$	$2k+2$	$2k+3$	...	47	48
$-k$	$-(k-1)$	...	-1	0	1	...	$k-1$	k	$k+1$	$k+2$	...	$46-k$	$47-k$

$\underbrace{\hphantom{xxxxxxxxxxxx}}_{(2k+1)\text{ чисел}}$ $\underbrace{\hphantom{xxxxxxxx}}_{(47-2k)\text{ чисел}}$

Сумма первых $2k+1$ чисел равна 0, сумму последних чисел, начиная с $k+1$ по $47-k$, можно найти с помощью формулы суммы n первых членов арифметической прогрессии. Эта сумма равна $24(47-2k) = S$, которую нашла девочка. Приравняв её к числу 888, получим уравнение $24(47-2k) = 888$, поэтому $k = 5$. Число 0 девочка записала на странице с номером $k+1$, то есть на 6-й странице.

Ответ: а) 24; б) 1; в) 6.

Решение варианта № 31

1. Если бы Никита не приобрёл проездной, то за 39 поездок он бы заплатил $39 \cdot 26 = 1014$ (рублей). Тем самым он бы потратил на $1014 - 580 = 434$ рубля больше.

Ответ: 434.

2. Из формулы $v = 0{,}045n$ следует утверждение «Чем меньше число оборотов двигателя, тем меньше скорость». Найдём, каким должно быть минимальное число оборотов в минуту, чтобы крутящий момент был не менее 80 Н·м. Так как цена деления по вертикальной оси равна 20 Н·м, а по горизонтальной — 500 об/мин, получим, что наименьшее подходящее число оборотов в минуту равно 2000 (см. рис. 149). Соответствующая скорость равна $0{,}045 \cdot 2000 = 90$ (км/ч).

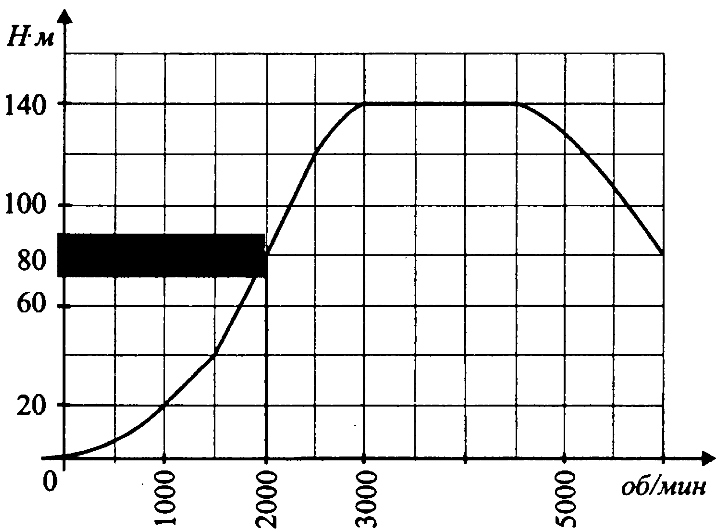


Рис. 149

Ответ: 90.

3. Используя теорему Пифагора, получим, что $BK = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$. Аналогично $AB = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$. При этом $AK = \sqrt{7^2 + 3^2} = \sqrt{58}$. Таким образом, $AK^2 = AB^2 + BK^2$ и по теореме, обратной теореме Пифагора, $\triangle ABK$ — прямоугольный с прямым углом B. Значит, $\operatorname{tg} \angle BKA = \dfrac{AB}{BK} = 1$.

Ответ: 1.

4. Пусть типография отпечатала n справочников. Тогда $0{,}1n$ справочников имеют дефекты, из них при контроле качества выявили 60%, то есть $0{,}6 \cdot 0{,}1n = 0{,}06n$. Значит, в продажу попали $n - 0{,}06n = 0{,}94n$ справочников, из которых $0{,}1n - 0{,}06n = 0{,}04n$ имеют дефекты. Таким образом, искомая вероятность равна $\frac{0{,}04n}{0{,}94n} = \frac{2}{47} \approx 0{,}043$.

Ответ: 0,043.

5. Разделим обе части исходного уравнения на 4^{10-3x}, получим $\left(\frac{3}{4}\right)^{10-3x} = \frac{3}{4}$, тогда $10 - 3x = 1$, $x = 3$.

Ответ: 3.

6. Пусть $BC = 53$, $AD = 75$, $AB = CD = 22$ (см. рис. 150). Опустим высоты трапеции BH и CK.

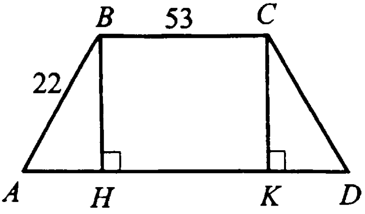


Рис. 150

Очевидно, $HK = BC = 53$, $AH = KD = \frac{75-53}{2} = 11$. В прямоугольном треугольнике ABH катет $AH = 11$, гипотенуза $AB = 22$, значит, $\cos BAH = \frac{AH}{AB} = \frac{11}{22} = 0{,}5$.

Ответ: 0,5.

7. Из рисунка видно, что точками экстремума являются точки 0, 3, 6 (точки максимума) и точки 1, 5 (точки минимума). Значит, их сумма равна $0 + 3 + 6 + 1 + 5 = 15$.

Ответ: 15.

8. Круг, лежащий в основании цилиндра, вписан в квадрат, сторона которого равна диаметру круга, то есть 10. Одно из рёбер параллелепипеда равно высоте цилиндра и равно 5. Значит, объём параллелепипеда — $5 \cdot 10 \cdot 10 = 500$.

Ответ: 500.

9. Если $p(x) = x + 8$, то $p(3x) = 3x + 8$ и $p(x+2) = (x+2) + 8 = x + 10$. Отсюда $8(p(3x) - p(x+2)) = 8(3x + 8 - 3(x+10)) = 8 \cdot (-22) = -176$.

Ответ: -176.

17.Зак. № 82

10. Согласно условию задачи, должно выполняться неравенство $\frac{2\cdot 35\sin\alpha}{10} \geqslant 7$, то есть $7\sin\alpha \geqslant 7$, или, иными словами, $\sin\alpha \geqslant 1$, что выполняется, только если $\sin\alpha = 1$. Отсюда наименьшее значения α равно 90°.

Ответ: 90.

11. Капитал компании «Звезда» каждый год увеличивался на 150%, то есть в $1+\frac{150}{100} = \frac{5}{2}$ раза. Капитал компании «Планета» каждый год увеличивался на 300%, то есть в $1 + \frac{300}{100} = 4$ раза. Капитал компании «Звезда» увеличивался с 2010 до 2014 года, то есть в течение 5 лет. Капитал компании «Планета» увеличивался с 2012 до 2014 года, то есть в течение 3 лет. Таким образом, к концу 2014 года капитал компании «Звезда» стал равен $480\,000\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^5 = 480\,000\cdot\frac{3125}{32} = 15\,000\cdot 3125 = 46\,875\,000$ (рублей). Капитал компании «Планета» стал равен $720\,000\cdot 4^3 = 720\,000\cdot 64 = 46\,080\,000$ (рублей). Значит, капитал компании «Звезда» стал больше капитала компании «Планета» на $46\,875\,000 - 46\,080\,000 = 795\,000$ (рублей).

Ответ: 795 000.

12. Найдём производную:

$$y'(x) = \left((x+2)^2\right)'(x-10) + (x+2)^2(x-10)' + 0 =$$
$$= 2(x+2)(x-10) + (x+2)^2 = (x+2)(3x-18) = 3(x+2)(x-6).$$

Значит, $y'(x) = 0$ при $x = -2$ и $x = 6$. Отрезку $[-1;\ 20]$ принадлежит значение $x = 6$. При этом $y'(x) > 0$ при $x > 6$ (значит, на отрезке $[6;\ 20]$ функция $y(x)$ возрастает). Аналогично $y'(x) < 0$ при $-1 \leqslant x < 6$, поэтому на указанном промежутке $y(x)$ убывает. Тогда, очевидно, наименьшее значение на отрезке $[-1;\ 20]$ достигается в точке $x = 6$, причём $y(6) = (6+2)^2(6-10) + 156 = -100$.

Ответ: -100.

13. а) Используя основное тригонометрическое тождество и формулу синуса двойного аргумента, получим уравнение, левую часть которого разложим на множители $\sin x(2\cos x - \sin x) = 0$. Получим два уравнения.

1) $\sin x = 0$, тогда $x = \pi n$, где $n \in Z$;

2) $2\cos x - \sin x = 0$, которое равносильно уравнению $\operatorname{tg} x = 2$, тогда $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k$, где $k \in Z$.

б) На схеме (см. рис. 151) изображена числовая окружность, на которой выделена дуга от $-\frac{\pi}{2}$ до π. Промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ принадлежат три корня: $x_1 = 0, x_2 = \operatorname{arctg} 2; x_3 = \pi$.

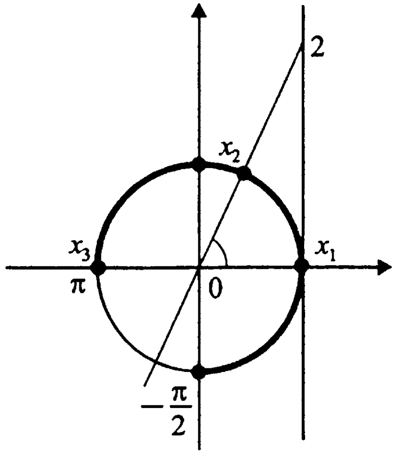
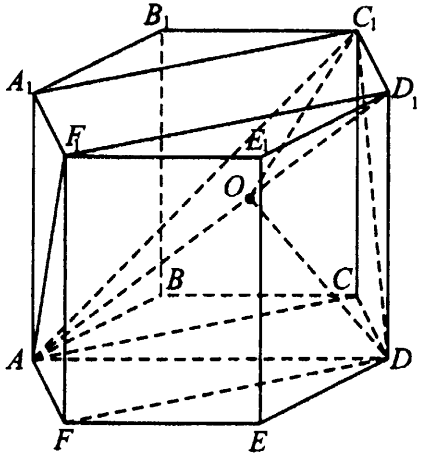


Рис. 151

Ответ: а) $\pi n, n \in Z$; $\operatorname{arctg} 2 + \pi k$, $k \in Z$; б) $0, \pi, \operatorname{arctg} 2$.

14. а) Заметим, что параллелепипед $FAA_1F_1DCC_1D_1$ является правильной призмой. $AC \perp CC_1D$, тогда $AC \perp C_1D$; $C_1D \perp CD_1$ как диагонали квадрата, значит, $DC_1 \perp ACD_1$ и поэтому прямые AD_1 и DC_1 перпендикулярны, и угол между ними прямой (см. рис. 152).

б) Рассмотрим двугранный угол DD_1AC_1 и его линейный угол DOC_1. С помощью теоремы Пифагора можно найти высоту $FD = 4\sqrt{3}$ параллелепипеда, диагональ боковой грани $AD = 8$ и диагональ параллелепипеда $AD_1 = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$. В прямоугольном треугольнике ADD_1 с известными катетами $AD = 8$, $DD_1 = 4$ и гипотенузой $AD_1 = 4\sqrt{5}$ найдём высоту $DO = \frac{8}{\sqrt{5}}$. Из равенства треугольников ADD_1 и D_1AC_1 (по трём сторонам) следует, что треугольник DOC_1 является равнобедренным $OD = OC_1 = \frac{8}{\sqrt{5}}$ и с основанием $DC_1 = 4\sqrt{2}$.



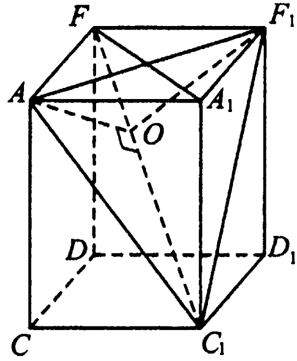


Рис. 152

Применяя теорему косинусов, найдём $\cos DOC_1 = -\frac{1}{4}$, значит, угол между плоскостями FAC_1 и AA_1D равен $\arccos\frac{1}{4}$.

Ответ: $\arccos\frac{1}{4}$.

15. Очевидно, что $x > 0$. $\log_3 x - 3^x < 0$ при всех x. Поэтому знаменатель дроби принимает только отрицательные значения. Докажем это.

Докажем, что $3^x > x$. Рассмотрим $f(x) = 3^x - x$. $f'(x) = 3^x \ln 3 - 1$. $f'(x) = 0$ при $3^x \ln 3 - 1 = 0$, $3^x = \frac{1}{\ln 3}$, $x_1 = \log_3 \frac{1}{\ln 3}$ — точка минимума, $f(x_1)$ — наименьшее значение $f(x)$.

Докажем, что $f(x_1) > 0$.

$\frac{1}{\ln 3} - \log_3 \frac{1}{\ln 3} > 0$; $\log_3 e - \log_3 \log_3 e > 0$; $\log_3 e > \log_3 \log_3 e$; $e > \log_3 e$; $3^e > e$. Это верно, так как $3^e > 3^2 > e$.

Получили, что $3^x > x$. Тогда $\log_3 3^x > \log_3 x$, $x > \log_3 x$. Значит, $\log_3 x - 3^x < 0$.

Умножив обе части неравенства на $\log_3 x - 3^x$, получим неравенство $3^x + \log_3^2 x - 6 \leqslant -\log_3 x + 3^x$, которое легко сводится к неравенству $\log_3^2 x + \log_3 x - 6 \leqslant 0$. Решив его методом замены переменной, получим, что $-3 \leqslant \log_3 x \leqslant 2$. Потенцируя это неравенство, находим, что

$\frac{1}{27} \leqslant x \leqslant 9$. Уточним, что все эти числа удовлетворяют условию $x > 0$, поэтому решением данного неравенства являются $x \in \left[\frac{1}{27}; 9\right]$.

Ответ: $\left[\frac{1}{27}; 9\right]$.

16. а) Высоту CH треугольника ABC можно найти по теореме Пифагора для $\triangle CBH$, она равна 15. Тогда площадь S треугольника ABC равна 120, периметр P равен 50, радиус вписанной окружности равен $r = \frac{2S}{P} = \frac{2 \cdot 120}{50} = \frac{24}{5} = 4{,}8$.

б) Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, тогда $OH = \frac{24}{5}$. Отрезки O_1M и O_2N — радиусы, проведённые в точку касания со стороной AB. Треугольники AOH и AO_1M подобны по двум углам, поэтому их стороны пропорциональны: $\frac{OH}{O_1M} = \frac{AH}{AM}$; $\frac{24}{5} = \frac{8}{AM}$; $AM = \frac{5}{3}$ (см. рис. 153).

$$O_1O_2 = MN = 16 - 2 \cdot \frac{5}{3} = 16 - \frac{10}{3} = \frac{38}{3}.$$

Треугольники ABC и $O_1O_2O_3$ подобны, потому что их соответственные стороны параллельны.

Коэффициент подобия $k = \frac{AB}{O_1O_2} = \frac{16}{\left(\frac{38}{3}\right)} = \frac{24}{19}$, поэтому площадь

$$S_{O_1O_2O_3} = S_{ABC} : k^2 = 120 \cdot \left(\frac{19}{24}\right)^2 = 75\frac{5}{24}.$$

Ответ: а) 4,8; б) $75\frac{5}{24}$.

17. Для краткости записи число 62 000 обозначим через N. На поверхности мышки:

после 1-й дезинфекции осталось $2N - n$ бактерий;

после 2-й дезинфекции осталось $2(2N - n) - n = 4N - 3n$ бактерий;

после 3-й дезинфекции осталось $2(4N - 3n) - n = 8N - 7n$ бактерий;

после 4-й дезинфекции осталось $2(8N - 7n) - n = 16N - 15n$ бактерий;

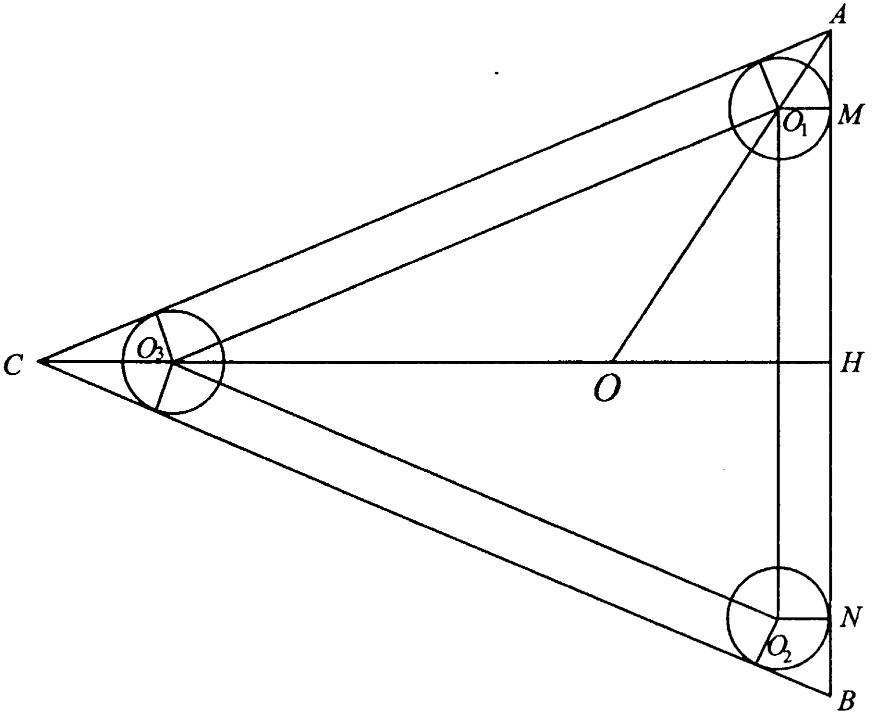


Рис. 153

после 5-й дезинфекции осталось $2(16N-15n)-n=32N-31n$ бактерий;

По условию задачи $32N-31n=0$, поэтому $n=\frac{32N}{31}$. Если $N=62\,000$, то $n=\frac{32\cdot 62\,000}{31}=64\,000$ — столько бактерий погибало во время каждой дезинфекции.

Ответ: 64 000.

18. 1. Первое уравнение системы задаёт окружности S_1 и S_2 радиусом $\sqrt{10}$, симметричные относительно оси ординат. Центры этих окружностей точки $P_1(10;6)$ и $P_2(-10;6)$.

2. Второе уравнение системы — тоже окружность S радиусом $a>0$ с центром $P(-4;0)$.

3. Система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружность S касается одной из окружностей S_1 и S_2, но не имеет общих точек с другой окружностью.

4. Из точки P проведём лучи PP_1 и PP_2 и обозначим E_1, E_2, F_1, F_2, точки пересечения с окружностями S_1 и S_2 (см. рис. 154).

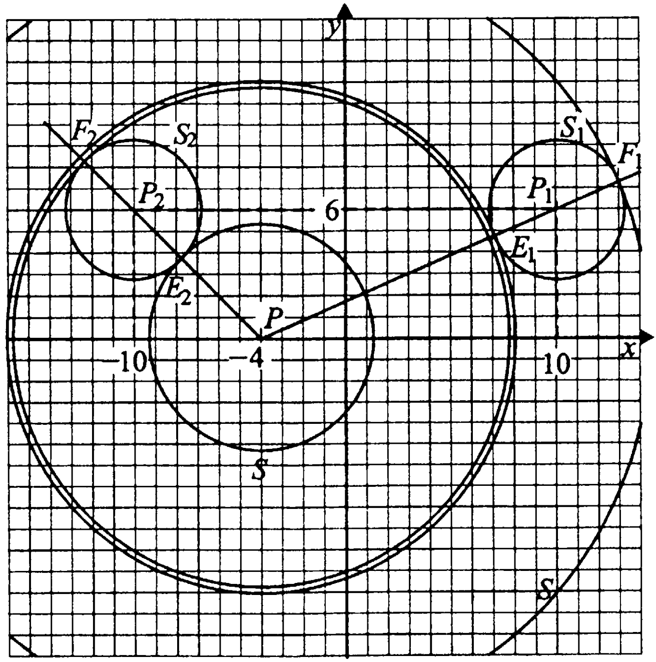


Рис. 154

5. $PP_2 < PP_1$, поэтому $PE_2 < PE_1$ и $PF_2 < PF_1$. Значит, если $a = PE_2$, то S касается S_2, но не имеет общих точек с S_1. Если $a = PF_1$, то S касается S_1, но не имеет общих точек с S_2.

Далее:

$PE_2 = PP_2 - P_2E_2 = \sqrt{(10-4)^2+6^2} - \sqrt{10} = \sqrt{72} - \sqrt{10} =$
$= 6\sqrt{2} - \sqrt{10} = \sqrt{2}(6 - \sqrt{5})$.

$PF_1 = PP_1 + P_1F_1 = \sqrt{(10+4)^2+6^2} + \sqrt{10} = \sqrt{232} + \sqrt{10} =$
$= \sqrt{2}(\sqrt{116} + \sqrt{5}) = \sqrt{2}(2\sqrt{29} + \sqrt{5})$.

Сравним PE_1 и PF_2:

$PE_1 = \sqrt{(10+4)^2+6^2} - \sqrt{10} = \sqrt{232} - \sqrt{10} = 2\sqrt{58} - \sqrt{10} =$
$= \sqrt{2}(2\sqrt{29} - \sqrt{5})$;

$PF_2 = \sqrt{(10-4)^2+6^2} + \sqrt{10} = \sqrt{72} + \sqrt{10} = 6\sqrt{2} + \sqrt{10} =$
$= \sqrt{2}(6 + \sqrt{5})$.

Получаем $PE_1 > PF_2$, следовательно, S касается S_2, а с S_1 не имеет общих точек при $a = PF_2$ и S касается S_1, а с S_2 не имеет общих точек при $a = PE_1$.

Следовательно, $a = \sqrt{2}(6 \pm \sqrt{5})$ или $a = \sqrt{2}(2\sqrt{29} \pm \sqrt{5})$, других решений задача не имеет.

Ответ: $\sqrt{2}(6 \pm \sqrt{5})$; $\sqrt{2}(2\sqrt{29} \pm \sqrt{5})$.

19. а) Очевидно, что сумма 84 чисел
$(-41 - 40 - \ldots - 1 + 0 + 1 + \ldots + 40 + 41) + 42$ равна 42, и понятно, что 0 записан на 42-й странице тетради. Если бы мальчик записал 0 на странице m, где $m > 42$, то S была бы меньше 42. А если $m < 42$, то $S > 42$.

б) Если 0 записан на первой странице, то сумма 84 чисел
$0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + 82 + 83$ равна 3 486. В этом нетрудно убедиться, используя формулу суммы n первых членов арифметической прогрессии.

в) Так как $S > 0$, то мальчик записал положительных чисел больше, чем отрицательных. Рассмотрим таблицу, в первой строке которой записаны номера страниц по фабричной нумерации, а во второй строке номера, записанные мальчиком.

1	2	...	k	$k+1$	$k+2$	...	$2k$	$2k+1$	$2k+2$	$2k+3$	...	83	84
$-k$	$-(k-1)$	...	-1	0	1	...	$k-1$	k	$k+1$	$k+2$	...	$82-k$	$83-k$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{(2k+1)\text{ чисел}}$ $\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{(83-2k)\text{ чисел}}$

$(2k+1)$ чисел $(83-2k)$ чисел

Сумма первых $2k + 1$ чисел равна 0, сумму последних чисел, начиная с $k + 1$ по $83 - k$, можно найти с помощью формулы суммы n первых членов арифметической прогрессии. Эта сумма равна $42(83 - 2k) = S$, которую нашёл мальчик. Приравняв её к числу 1 890, получим уравнение $42(83-2k) = 1\,890$, поэтому $k = 19$. Число 0 мальчик записал на странице с номером $k + 1$, то есть на 20-й странице.

Ответ: а) 42; б) 1; в) 20 .

Решение варианта № 32

1. За 18 номеров журнала Аня заплатила $18 \cdot 32 = 576$. Если бы она подписалась на журнал, то сэкономила бы $576 - 430 = 146$ (рублей).

Ответ: 146.

2. Из формулы $v = 0{,}045n$ следует утверждение «Чем меньше число оборотов двигателя, тем меньше скорость». Найдём, каким должно быть минимальное число оборотов в минуту, чтобы крутящий момент был не менее 150 Н·м. Так как цена деления по вертикальной оси равна 30 Н·м, а по горизонтальной — 400 об/мин, получим, что наименьшее подходящее число оборотов — 1200 (см. рис. 155). Соответствующая скорость равна $0{,}045 \cdot 1200 = 54$ (км/ч).

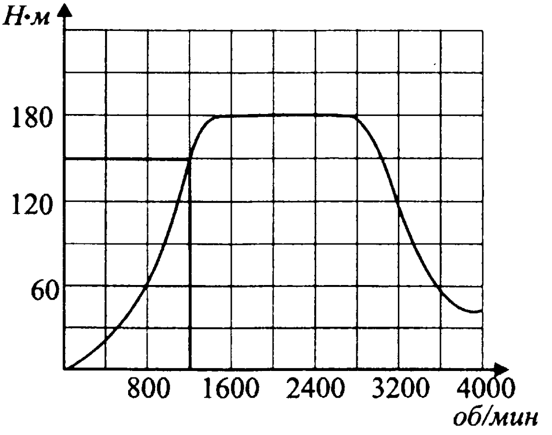


Рис. 155

Ответ: 54.

3. Опустим перпендикуляр KH к прямой ST (см. рис. 156). Будем считать, что диагональ клетки равна 1. Рассмотрим прямоугольный треугольник KHS. В нём $KH = 1$, $SH = 4$. Значит, $\operatorname{tg} \angle KSH = \dfrac{KH}{SH} = 0{,}25$.

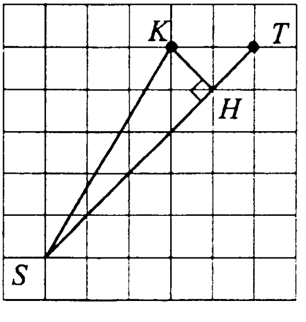


Рис. 156

Ответ: 0,25.

4. Пусть фабрика произвела n кружек. Тогда $0{,}15n$ кружек имеют дефекты, из них при контроле качества выявили 80%, то есть $0{,}8 \cdot 0{,}15n = 0{,}12n$ штук кружек, а остальные $n - 0{,}12n = 0{,}88n$ попали в продажу. Из них $n - 0{,}15n = 0{,}85n$ не имеют дефекты. Таким образом, искомая вероятность равна $\dfrac{0{,}85n}{0{,}88n} = \dfrac{85}{88} \approx 0{,}966$.

Ответ: 0,966.

5. Разделим обе части исходного уравнения на 10^{4+5x}, получим $\left(\dfrac{3}{10}\right)^{4+5x} = 0{,}09$, или, что тоже самое, $\left(\dfrac{3}{10}\right)^{4+5x} = \left(\dfrac{3}{10}\right)^{2}$. Значит, $4 + 5x = 2$, $5x = -2$, $x = -0{,}4$.

Ответ: $-0{,}4$.

6. Пусть $BC = 55$, $AD = 85$, $\cos BAD = \dfrac{5}{8}$ (см. рис. 157).

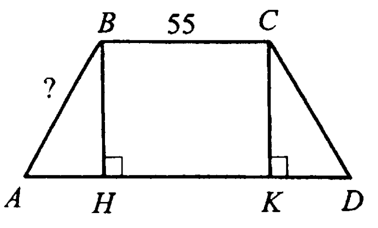


Рис. 157

Опустим высоты трапеции BH и CK. Очевидно, $HK = BC = 55$, $AH = KD = \dfrac{85 - 55}{2} = 15$. В прямоугольном треугольнике ABH катет $AH = AB \cos BAH$, значит, $AB = \dfrac{AH}{\cos BAH} = \dfrac{15}{\left(\frac{5}{8}\right)} = 24$.

Ответ: 24.

7. Из рисунка видно, что точками экстремума являются точки -7, -2, 5 (точки максимума) и точки -5, 3 (точки минимума). Значит, их сумма равна $-7 - 2 + 5 - 5 + 3 = -6$.

Ответ: -6.

8. Круг, лежащий в основании цилиндра, вписан в квадрат, сторона которого равна диаметру круга, то есть 10.

Одно из рёбер параллелепипеда равно высоте цилиндра h. Значит, объём параллелепипеда равен $10 \cdot 10 \cdot h = 400$. Отсюда $h = \dfrac{400}{100} = 4$.

Ответ: 4.

9. Если $p(x) = 3x - 7$, то $p(x+2) = 3(x+2) - 7 = 3x - 1$ и $p(9-x) = 3(9-x) - 7 = 20 - 3x$.

Отсюда $p(x+2) + p(9-x) = 3x - 1 + 20 - 3x = 19$.

Ответ: 19.

10. Согласно условию задачи, должно выполняться неравенство $\dfrac{2 \cdot 20 \sin\alpha}{10} \geqslant 2$, то есть $\sin\alpha \geqslant \dfrac{1}{2}$. Отсюда наименьшее значение α равно 30°.

Ответ: 30.

11. Капитал компании «Янтарь» каждый год увеличивался на 200%, то есть в $1 + \dfrac{200}{100} = 3$ раза. Капитал компании «Яшма» каждый год увеличивался на 400%, то есть в $1 + \dfrac{400}{100} = 5$ раз. Капитал компании «Янтарь» увеличивался с 2010 до 2014 года, то есть в течение 5 лет. Капитал компании «Яшма» увеличивался с 2012 до 2014 года, то есть в течение 3 лет. Таким образом, к концу 2014 года капитал компании «Янтарь» стал равен $350\,000 \cdot 3^5 = 350\,000 \cdot 243 = 85\,050\,000$ (рублей). Капитал компании «Яшма» стал равен $700\,000 \cdot 5^3 = 700\,000 \cdot 125 = 87\,500\,000$ (рублей). Значит, капитал компании «Яшма» стал больше капитала компании «Янтарь» на $87\,500\,000 - 85\,050\,000 = 2\,450\,000$ (рублей).

Ответ: 2 450 000.

12. Найдём производную:

$y'(x) = \left((x-4)^2\right)'(x+8) + (x-4)^2(x+8)' = 2(x-4)(x+8) + (x-4)^2 =$ $= (x-4)(3x+12) = 3(x-4)(x+4)$. Значит, $y'(x) = 0$ при $x = -4$ и $x = 4$. При этом $y'(x) > 0$ при $x < -4$ (значит, на отрезке $[-8;\ -4]$ функция $y(x)$ возрастает. Аналогично $y'(x) < 0$ при $-4 < x < 4$, поэтому на $[-4;\ 4]$ функция $y(x)$ убывает. Тогда, очевидно, наибольшее значение на отрезке $[-8;\ 4]$ достигается в точке $x = -4$, причём $y(-4) =$ $= (-4-4)^2(-4+8) - 206 = 50$.

Ответ: 50.

13. а) Используя основное тригонометрическое тождество и формулу косинуса двойного аргумента, получим уравнение $\operatorname{tg}^2 x = 3$, которое равносильно уравнению $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3}$. Получим два уравнения:

1) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$, и первую серию корней $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, где $n \in Z$;

2) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$, и вторую серию корней $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$, где $k \in Z$.

б) На рисунке 158 изображена числовая окружность, на которой выделена дуга от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ принадлежат два корня: $x_1 = -\frac{\pi}{3}$; $x_2 = \frac{\pi}{3}$.

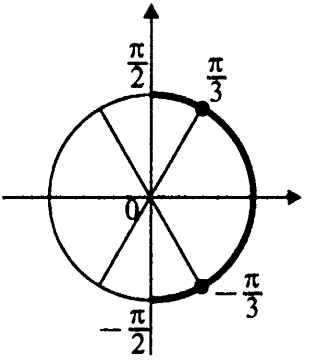


Рис. 158

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, где $n \in Z$; б) $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}$.

14. а) Прямые A_1D_1 и AD параллельны (см. рис. 159), поэтому угол между прямыми AD и B_1E_1 равен углу между прямыми A_1D_1 и B_1E_1, а он равен $60°$, потому что угол между диагоналями правильного шестиугольника равен $60°$.

б) Заметим, что параллелепипед $BAA_1B_1DEE_1D_1$ является правильной призмой. Рассмотрим двугранный угол DB_1AE_1 и его линейный угол DOE_1, где O — точка пересечения диагоналей квадрата BAA_1B_1. С помощью теоремы Пифагора можно найти высоту $BD = 4\sqrt{3}$ параллелепипеда, диагонали $AB_1 = DE_1 = 4\sqrt{2}$ основания. Из $\triangle BB_1D$ найдём $B_1D = AD = 8$ и отрезок $OD = \sqrt{DA^2 - AO^2} = 2\sqrt{14}$. Из равенства треугольников B_1AD и B_1AE_1 следует, что треугольник DOE_1 является равнобедренным ($OD = OE_1 = 2\sqrt{14}$) с основанием $DE_1 = 4\sqrt{2}$.

Применяя теорему косинусов, найдём $\cos DOE_1 = \frac{5}{7}$, значит, угол между плоскостями B_1AD и B_1AE_1 равен $\arccos\frac{5}{7}$.

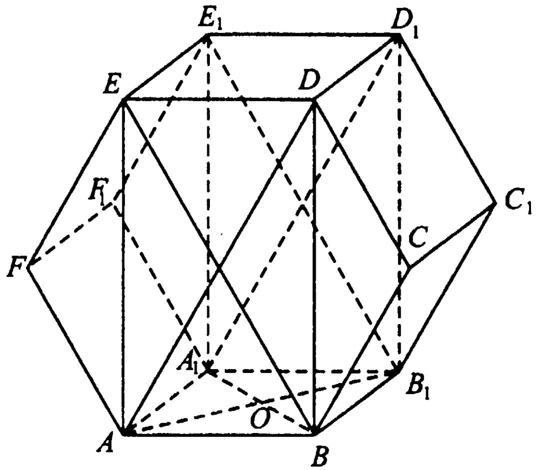


Рис. 159

Ответ: $\arccos\frac{5}{7}$.

15. Очевидно, что $x > 0$. Заметим, что $\log_5 x < 5^x$ при любом x, поэтому знаменатель дроби принимает только отрицательные значения. Доказательство аналогично приведённому доказательству в варианте 31.

Умножив обе части неравенства на $\log_5 x - 5^x$, получим неравенство $5^x + \log_5^2 x - 20 \leqslant -\log_5 x + 5^x$, которое легко сводится к неравенству $\log_5^2 x + \log_5 x - 20 \leqslant 0$. Решив его методом подстановки, получим, что $-5 \leqslant \log_5 x \leqslant 4$. Потенцируя это неравенство, находим, что $\frac{1}{5^5} \leqslant x \leqslant 5^4$. Уточним, что все эти числа удовлетворяют условию $x > 0$, поэтому решением данного неравенства являются $x \in \left[\frac{1}{3125}; 625\right]$.

Ответ: $\left[\frac{1}{3125}; 625\right]$.

16. а) Высоту CH треугольника ABC можно найти по теореме Пифагора для $\triangle ACH$, она равна 12. Тогда площадь S треугольника ABC

равна 60, периметр P равен 36, радиус вписанной окружности равен $\frac{2S}{P} = \frac{2 \cdot 60}{36} = \frac{10}{3}$ (см. рис. 160).

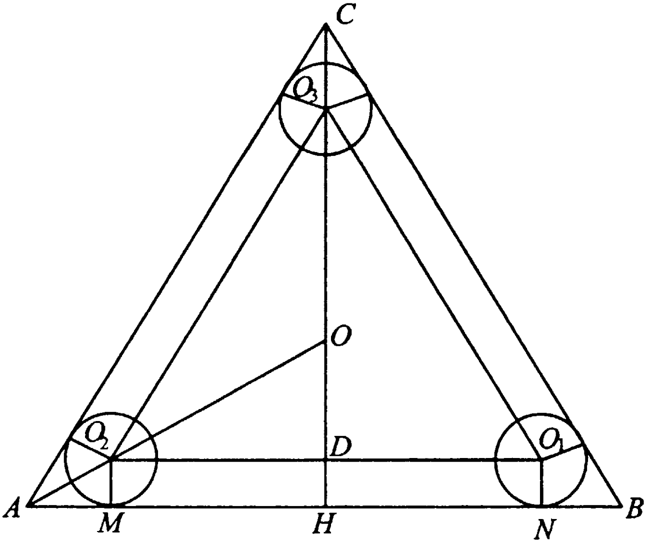


Рис. 160

б) Треугольники ABC и $O_1O_2O_3$ подобны, потому что их соответственные стороны параллельны. Учитывая, что отношение площадей $S_{ABC} : S_{O_1O_2O_3} = k^2$ (k — коэффициент подобия) и площадь треугольника $O_1O_2O_3$ равна $\frac{1}{2}$ площади треугольника ABC, получим, что $k = \sqrt{2}$. Коэффициент подобия $k = \frac{AB}{O_1O_2} = \sqrt{2}$, поэтому $O_1O_2 = 5\sqrt{2}$, $O_2D = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, тогда $OH = \frac{10}{3}$. Отрезок O_2M — радиус, проведённый в точку касания со стороной AB. Треугольники AOH и O_2OD подобны по двум углам, поэтому их стороны пропорциональны: $\frac{OH}{OD} = \frac{AH}{O_2D}$.

$OD = OH - DH$, где $DH = r$, $\dfrac{10}{3\left(\frac{10}{3} - r\right)} = \dfrac{5\cdot 2}{5\sqrt{2}}$;

$\dfrac{10}{3} - r = \dfrac{10\sqrt{2}}{6}$, $r = \dfrac{5(2-\sqrt{2})}{3}$.

Ответ: а) $\dfrac{10}{3}$; б) $\dfrac{5(2-\sqrt{2})}{3}$.

17. Пусть в пчелином улье после зимовки сохранилось N пчёл, тогда в улье стало:

через 1 месяц $1{,}4N - 2000$ пчёл;
через 2 месяца $1{,}4(1{,}4N - 2\,000) - 2\,000$ пчёл;
через 3 месяца $1{,}4(1{,}4(1{,}4N - 2\,000) - 2\,000) - 2\,000$ пчёл;
через 4 месяца $1{,}4(1{,}4(1{,}4(1{,}4N - 2\,000) - 2\,000) - 2\,000) - 2\,000$ пчёл.
Исходя из условия задачи, составим и решим уравнение:
$1{,}4(1{,}4(1{,}4(1{,}4N - 2\,000) - 2\,000) - 2\,000) - 2\,000 = 62\,624$;

$1{,}4(1{,}4(1{,}4N - 2\,000) - 2\,000) - 2\,000 = 46\,160$;
$1{,}4(1{,}4N - 2\,000) - 2\,000 = 34\,400$;

$1{,}4N - 2000 = 26\,000$;

$N = 20\,000$.

Значит, в пчелином улье после зимовки сохранилось 20 000 пчёл.
Ответ: 20 000.

18. 1. Первое уравнение системы задаёт окружности S_1 и S_2 радиусом $\sqrt{7}$, симметричные относительно оси ординат. Центры этих окружностей — точки $O_1(7;3)$ и $O_2(-7;3)$.

2. Второе уравнение системы тоже задаёт окружность S радиусом $a > 0$ с центром $O_3(-1;0)$.

3. Система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружность S касается одной из окружностей S_1 и S_2, но не имеет общих точек с другой окружностью (см. рис. 161).

4. Из точки O_3 проведём лучи O_3O_1 и O_3O_2 и обозначим D_1, B_1, D_2, B_2, — точки их пересечения с окружностями S_1 и S_2.

$O_3O_2 < O_3O_1$, поэтому $O_3D_2 < O_3D_1$ и $O_3B_2 < O_3B_1$. Значит, если $a = O_3D_2$, то S касается S_2, но не имеет общих точек с S_1. Если $a = O_3B_1$, то S касается S_1, но не имеет общих точек с S_2.

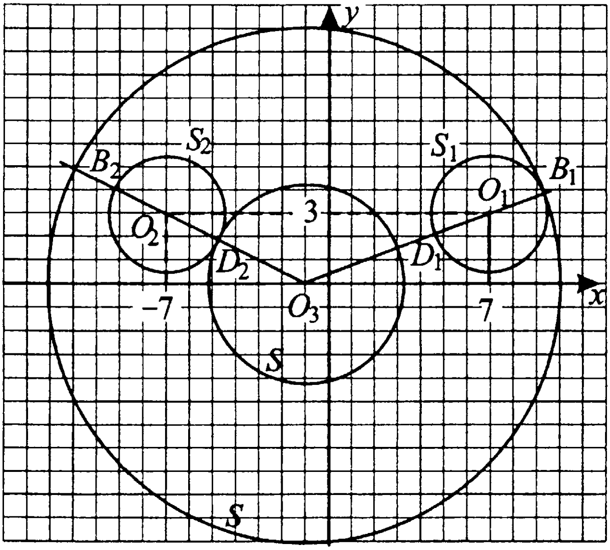


Рис. 161

$O_3D_2 = O_3O_2 - O_2D_2 = \sqrt{(7-1)^2+3^2} - \sqrt{7} = \sqrt{45} - \sqrt{7} = 3\sqrt{5} - \sqrt{7}$.

$O_3B_1 = O_3O_1 + O_1B_1 = \sqrt{(7+1)^2+3^2} + \sqrt{7} = \sqrt{73} + \sqrt{7}$.

Сравним O_3D_1 и O_3B_2:

$O_3D_1 = \sqrt{(7+1)^2+3^2} - \sqrt{7} = \sqrt{73} - \sqrt{7}$;

$O_3B_2 = \sqrt{(7-1)^2+3^2} + \sqrt{7} = \sqrt{45} + \sqrt{7}$.

Получаем $O_3D_1 < O_3B_2$, следовательно, при $a = O_3B_2$ окружность S касается S_2, а с S_1 имеет две общие точки, что противоречит условию задачи.

При $a = O_3D_1$ окружность S касается S_1, а с S_2 имеет две общие точки, что также противоречит условию.

Следовательно, $a = 3\sqrt{5} - 7$ или $a = \sqrt{73} + \sqrt{7}$, других решений задача не имеет.

Ответ: $3\sqrt{5} - \sqrt{7}$ или $\sqrt{73} + \sqrt{7}$.

19. а) Очевидно, что сумма 36 чисел $(-17 - 16 - \ldots - 1 + 0 + 1 + \ldots + 16 + 17) + 18$ равна 18, и понятно, что 0 записан на 18-й странице тетради. Ясно, что если бы девочка записала 0 на странице m, где $m > 18$, то S была бы меньше 18. А если $m < 18$, то S была бы больше 18.

б) Если 0 записан на первой странице, то сумма 36 чисел $0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + 34 + 35$ равна 630. В этом нетрудно убедиться, используя формулу суммы n первых членов арифметической прогрессии.

в) Так как $S > 0$, то девочка записала положительных чисел больше, чем отрицательных. Рассмотрим таблицу, в первой строке которой записаны номера страниц по фабричной нумерации, а во второй строке номера́, записанные девочкой.

1	2	...	k	$k+1$	$k+2$	...	$2k$	$2k+1$	$2k+2$	$2k+3$	...	35	36
$-k$	$-(k-1)$	...	-1	0	1	...	$k-1$	k	$k+1$	$k+2$	...	$34-k$	$35-k$

$(2k+1)$ чисел $\qquad$ $(35-2k)$ чисел

Сумма первых $2k+1$ чисел равна 0, сумму последних чисел, начиная с $k+1$ по $35-k$, можно найти с помощью формулы суммы n первых членов арифметической прогрессии. Эта сумма равна $18(35-2k) = S$, которую нашла девочка. Приравняв её к числу 450, получим уравнение $18(35-2k) = 450$, поэтому $k = 5$. Число 0 девочка записала на странице с номером $k+1$, то есть на 6-ой странице.

Ответ: а) 18; б) 1; в) 6.

Решение варианта № 34

1. $0{,}7 \cdot 42 = 29{,}4$ (руб.) — стоимость всех SMS-сообщений.
   $60{,}4 - 29{,}4 = 31$ (руб.) — остаток денег.
   Ответ: 31.
2. Наибольшее количество посетителей сайта «2 + 2» равно 25 000, впервые — 22 мая.
   Ответ: 22.
3. $\triangle ADC$: $\angle ADC = 90°$ (см. рис. 162),

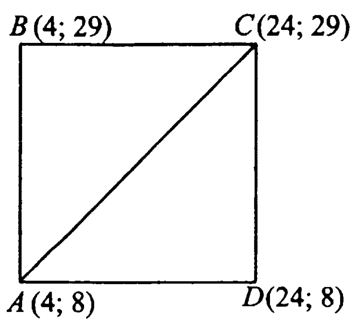


Рис. 162

$AC^2 = AD^2 + DC^2$, при $AD = 20$, $CD = 21$,
$AC^2 = 400 + 441 = 841$, $AC = 29$.
Ответ: 29.

4. Вероятность того, что Гена схватит пристрелянный револьвер, равна $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Вероятность схватить один из двух непристрелянных револьверов равна $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Вероятность события, что Гена схватит пристрелянный револьвер и из него попадёт в муху, равна $\frac{2}{3} \cdot 0{,}9 = 0{,}6$.

Вероятность события, что Гена схватит непристрелянный револьвер и из него попадёт в муху, равна $\frac{1}{3} \cdot 0{,}3 = 0{,}1$.

Такие события несовместны, поэтому вероятность попасть в муху равна $0{,}6 + 0{,}1 = 0{,}7$, а вероятность промахнуться равна $1 - 0{,}7 = 0{,}3$.

Ответ: 0,3.

5. $\log_6(144 + x) = 3$, $144 + x = 6^3$, $144 + x = 216$, $x = 72$.

Ответ: 72.

6. Пусть BH и CK — высоты трапеции (см. рис. 163).
$AD = AH + HK + KD$, $HK = BC$, $AH = KD$, $AD = BC + 2AH$.

По условию $\operatorname{tg} \angle BAD = \frac{13}{9}$.

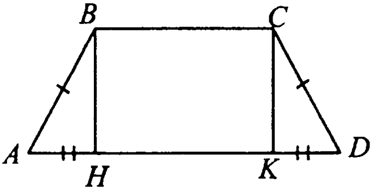


Рис. 163

Из $\triangle ABH$: $\operatorname{tg} \angle BAD = \frac{BH}{AH}$; $\frac{BH}{AH} = \frac{13}{9}$, $9BH = 13AH$.

$9 \cdot 26 = 13 \cdot AH$, $AH = \frac{9 \cdot 26}{13} = 18$.

$AD = 25 + 2 \cdot 18 = 61$.

Ответ: 61.

7. $S = F(-3) - F(-6) = (2 \cdot 27 - 27 \cdot 9 + 108 \cdot 3 + 1) - (2 \cdot 216 - 27 \cdot 36 + 108 \cdot 6 + 1) =$
$= 54 - 243 + 325 - (432 - 972 + 649) = 136 - 109 = 27$.

Ответ: 27.

8. DD_1 и B_1C — скрещивающиеся прямые (см. рис. 164). Угол между ними — это угол между пересекающимися прямыми B_1C и CC_1 ($DD_1 \parallel CC_1$): $\angle B_1CC_1$.

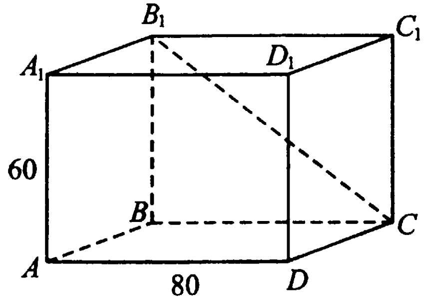


Рис. 164

$\triangle B_1CC_1$ — прямоугольный ($\angle B_1C_1C = 90°$).

$\sin\angle B_1CC_1 = \dfrac{B_1C_1}{B_1C}$.

$B_1C_1 = 80$, $B_1C = \sqrt{BC^2 + BB_1^2} = \sqrt{3600 + 6400} = \sqrt{10\,000} = 100$.

$\sin\angle B_1CC_1 = \dfrac{80}{100} = 0{,}8$.

Ответ: 0,8.

9. $$\frac{5a-b}{a+3b} = \frac{\frac{5a}{a} - \frac{b}{a}}{\frac{a}{a} + \frac{3b}{a}} = \frac{5 - \frac{b}{a}}{1 + 3\frac{b}{a}} = \frac{5+3}{1+3\cdot(-3)} = -\frac{8}{8} = -1.$$

Ответ: -1.

10. Из формулы $v = \sqrt{2la}$ выразим a: $a = \dfrac{v^2}{2l}$ и, подставив исходные данные $l = 0{,}5$ км, $v = 62$ км/ч, найдём $a = \dfrac{62^2}{2\cdot 0{,}5} = \dfrac{62^2}{1} = 3844$ (км/ч^2).

Ответ: 3844.

11. Пусть x кв. м плитки запланировано укладывать в день, тогда по плану плиточники выполнят работу за $\dfrac{300}{x}$ дней. Если они в день будут укладывать на 10 кв. м больше: $(x+10)$ кв. м, то окончат работу на день раньше. Составим и решим уравнение:

$$\frac{300}{x} - \frac{300}{x+10} = 1,\ \frac{3000}{x(x+10)} = 1,\ x^2 + 10x - 3000 = 0,$$

$x_{1,2} = -5 \pm 55,\ x > 0,\ x = 50.$

Ответ: 50.

12. $y = \dfrac{50}{x} + 2x + 307.$

$y' = -\dfrac{50}{x^2} + 2$, при $x \neq 0$.

$y' = 0,\ -\dfrac{50}{x^2} = -2,\ x^2 = 25.$

$x = \pm 5.$

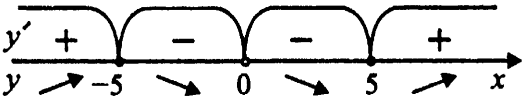


Рис. 165

Так как при переходе через точку $x = -5$ производная меняет знак с «+» на «−», то $x = -5$ — точка максимума (см. рис. 165).

Ответ: −5.

13. а) $|\sin x| - 5\sin x + 4\cos x = 0.$

1. $\sin x \geqslant 0$, тогда $|\sin x| = \sin x$ и уравнение примет вид:

$\sin x - 5\sin x + 4\cos x = 0,$

$-4\sin x + 4\cos x = 0,$

$\sin x = \cos x.$

При $\cos x \neq 0$ имеем $\operatorname{tg} x = 1$,

$x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

Учитывая, что $\sin x \geqslant 0$, $x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z.$

2. $\sin x < 0$, тогда $|\sin x| = -\sin x$ и уравнение примет вид:

$-\sin x - 5\sin x + 4\cos x = 0,$

$-6\sin x + 4\cos x = 0,$

$\sin x = \dfrac{2}{3}\cos x.$

При $\cos x \neq 0$ имеем $\operatorname{tg} x = \dfrac{2}{3}$,

$x = \operatorname{arctg}\dfrac{2}{3} + \pi k,\ k \in Z.$

Учитывая, что $\sin x < 0$, $x = \pi + \operatorname{arctg}\frac{2}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$, или $x = \operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \pi(1 + 2k)$, $k \in Z$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие промежутку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$ (см. рис. 166).

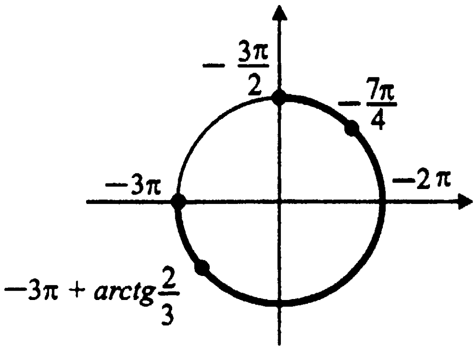


Рис. 166

$$x_1 = -2\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{7\pi}{4}$$

$$x_2 = -3\pi + \operatorname{arctg}\frac{2}{3}$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$; $\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \pi(1 + 2k), k \in Z$;

б) $-3\pi + \operatorname{arctg}\frac{2}{3}; -\frac{7\pi}{4}$.

14. а) В треугольнике BSC проведём медиану BD (см. рис. 167). Соединим точки B, K и D. $\triangle BDK$ — искомое сечение.

б) 1. По условию $AK : KC = 2 : 1$, значит, $KC + 2KC = AC$, $KC = \frac{1}{3}AC$.

2. Проведём $SO \perp (ABC)$ и $DH \perp (ABC)$, получим $SO \parallel DH$, а так как BD — медиана треугольника BSC, то $SD = DC$, тогда по теореме Фалеса $OH = HC$, поэтому DH — средняя линия $\triangle SOC$, $DH = \frac{1}{2}SO$.

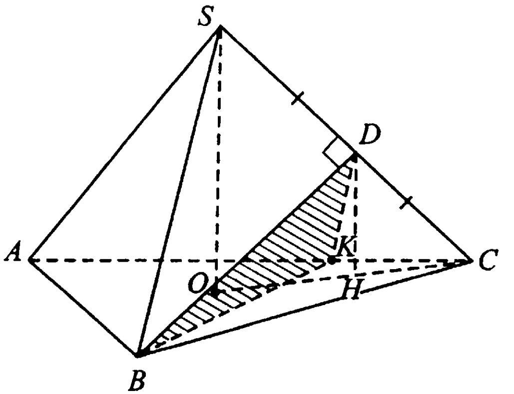


Рис. 167

3. В прямоугольном треугольнике SOC по теореме Пифагора $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2}$, OC — радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$, $OC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, где a — сторона правильного треугольника, $OC = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$.

$$SO = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{6},\ DH = \sqrt{6}.$$

4. $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$, $S_{BKC} = \frac{1}{3}S_{ABC} = 3\sqrt{3}$,

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6} = 18\sqrt{2},$$

$$V_{DBKC} = \frac{1}{3}S_{BKC} \cdot DH = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = 3\sqrt{2}.$$

Объём большей части равен $V_{SABC} - V_{DBKC} = 18\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$.

Ответ: $15\sqrt{2}$.

15. $\dfrac{(5^x-125)(\log_{x-1}x-\log_{x-1}3)}{(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+10})(|x-8|-|x|)}\geqslant 0.$

ОДЗ. $\begin{cases} x>0, \\ x-1>0, \\ x-1\neq 1, \\ x^2+2x\geqslant 0, \\ x^2+2x\neq x^2+10, \\ |x-8|\neq |x|; \end{cases}$ $\begin{cases} x>0, \\ x>1, \\ x\neq 2, \\ \left[\begin{array}{l} x\leqslant -2, \\ x\geqslant 0, \end{array}\right. \\ x\neq 5, \\ x^2-16x+64\neq x^2; \end{cases}$ $\begin{cases} x>1, \\ x\neq 2 \\ x\neq 5, \\ x\neq 4. \end{cases}$

$x\in(1;2)\cup(2;4)\cup(4;5)\cup(5;+\infty)$.

На ОДЗ данное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{(x-3)(x-1-1)(x-3)}{(x^2+2x-x^2-10)((x-8)^2-x^2)}\geqslant 0,$$

$$\frac{(x-3)^2(x-2)}{(x-5)(x^2-16x+64-x^2)}\geqslant 0,$$

$$\frac{(x-3)^2(x-2)}{(x-5)(x-4)}\leqslant 0,$$

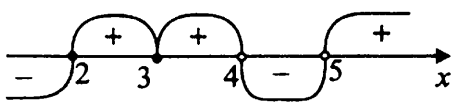


Рис. 168

$x\in(-\infty;2]\cup\{3\}\cup(4;5)$ (см. рис. 168).

Учитывая ОДЗ, получим $x\in(1;2)\cup\{3\}\cup(4;5)$.

Ответ: $(1;2)\cup\{3\}\cup(4;5)$.

16. а) Окружность с центром в точке O_1 описана около четырёхугольника $BKLC$ (см. рис. 169), значит, $\angle KBC+\angle KLC=180^\circ$, $\angle KLC=180^\circ-\angle KBC$.

$\angle KLA+\angle KLC=180^\circ$, $\angle KLC=180^\circ-\angle KLA$.

Отсюда $\angle KBC=\angle KLA$.

Имеем в треугольниках ABC и ALK: $\angle A$ — общий, $\angle ABC=\angle KBC=\angle ALK$, значит, $\triangle ABC\sim\triangle ALK$ по первому признаку подобия, что и требовалось доказать.

б) Из подобия следует $\dfrac{AB}{AL}=\dfrac{AC}{AK}=\dfrac{BC}{KL}$.

Обозначим $KE=x$, $LE=y$ и выразим AL, AK и KL через x и y. Окружность с центром в точке O вписана в $\triangle ABC$, значит, $AN=AM$,

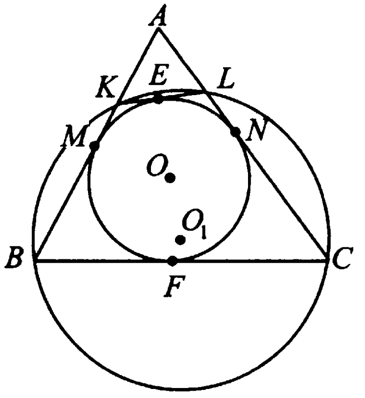


Рис. 169

$BM = BF$, $CF = CN$ как отрезки касательных, проведённых к окружности с центром в точке O из точек A, B и C соответственно. Обозначим $AM = AN = t$, тогда $BM = BF = 9 - t$, $CF = CN = 10 - t$, $BC = BF + CF = 9 - t + 10 - t = 11$, $t = 4$, $AM = AN = 4$.

Так как KE и KM, LE и LN — отрезки касательных, проведённых к окружности с центром O, то $KE = KM = x$ и $LE = LN = y$, $KL = KE + LE = x + y$.

Имеем $KL = x + y$, $AK = 4 - x$, $AL = 4 - y$.

Периметр $\triangle AKL$ равен $AK + KL + AL = 4 - x + x + y + 4 - y = 8$. Периметры подобных треугольников относятся так же, как их стороны, поэтому $\dfrac{8}{9 + 10 + 11} = \dfrac{KL}{11}$; $KL = \dfrac{4}{15} \cdot 11 = 2\dfrac{14}{15}$.

Ответ: $2\dfrac{14}{15}$.

17. Примем объём бассейна за единицу. 40 м^3 воды наливает в час первая труба, $(40 - 2k)$ м^3 воды наливает в час вторая труба, $(40 + 10k)$ м^3 воды наливает в час третья труба, $(40+40-2k)$ м^3 $= (80-2k)$ м^3 наливают в час первая и вторая трубы, $(80 - 2k + 40 + 10k)$ м^3 $= (120 + 8k)$ м^3 наливают в час три трубы, работая вместе, $\dfrac{0{,}2}{80 - 2k}$ часов работали первая и вторая трубы, $\dfrac{0{,}8}{120 + 8k}$ часов работали первая, вторая и третья трубы.

За $\left(\dfrac{0{,}2}{80 - 2k} + \dfrac{0{,}8}{120 + 8k}\right)$ часов бассейн наполнится водой.

Задача сводится к нахождению такого значения k, при котором значение функции $t(k) = \dfrac{0{,}2}{80-2k} + \dfrac{0{,}8}{120+8k} = \dfrac{88}{-16k^2+400k+9600}$ будет наименьшим. Но $t(k)$ будет наименьшим, когда $-16k^2+400k+9600$ будет наибольшим, то есть при $k = \dfrac{400}{2\cdot 16} = \dfrac{400}{32} = 12{,}5$ (заметим, что мы рассматриваем только те значения k, при которых $t(k) > 0$ и $k > 0$).

При $k = 12{,}5$ бассейн наполнится быстрее всего.

Ответ: 12,5.

18. $x^2 + 5|x-a| - 7x \leqslant -4a$.

Неравенство равносильно совокупности систем неравенств.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant a, \\ x^2+5x-5a-7x+4a \leqslant 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x < a, \\ x^2+5a-5x-7x+4a \leqslant 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant a, \\ x^2-2x-a \leqslant 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x < a, \\ x^2-12x+9a \leqslant 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \leqslant x, \\ a \geqslant x^2-2x; \end{cases} \\ \begin{cases} a > x, \\ a \leqslant -\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{4x}{3}. \end{cases} \end{array}\right.$$

В системе координат Oxa построим графики функций $a = x$, $a = x^2-2x$, $a = -\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{4x}{3}$ (см. рис. 170).

Полученной совокупности удовлетворяют точки, заключённые между графиками функций $a = x^2-2x$ и $a = -\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{4x}{3}$ на промежутке $[0; 3]$.

По графику определяем: неравенство имеет единственное решение при $a = -1$ и $a = 3$.

Ответ: $-1; 3$.

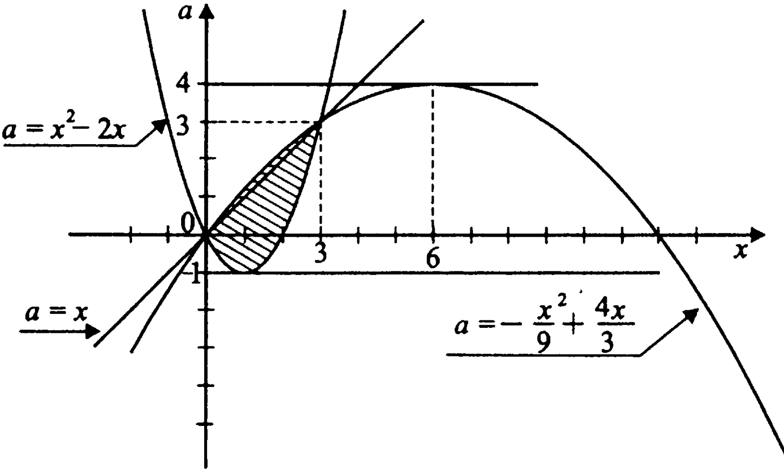


Рис. 170

19. а) Да, может. Введём на клетках систему координат (как показано на рисунке 171 а). «Кентавру» необходимо из клетки (1; 1) добраться в клетку (10; 1). Это можно осуществить, например, следующей последовательностью ходов (см. рис. 171 б):
(1; 1) → (3; 2) → (5; 1) → (7; 2) → (8; 4) → (10; 3) → (8; 2) → (10; 1).
В этом случае ход «Кентавра» совпадает с ходом обычного шахматного коня.

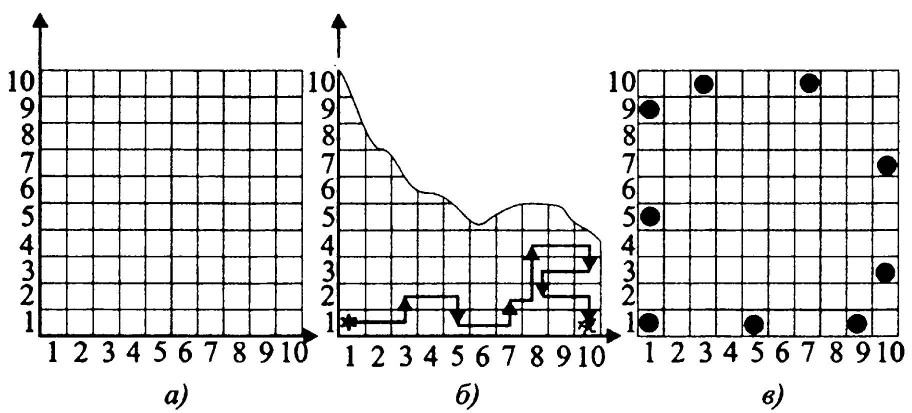


Рис. 171

б) Нет, не может. При указанном ходе каждая координата всякий раз изменяется на чётное число (2 или 4) и, следовательно, остаётся нечётной, так как изначально «Кентавр» стоит в клетке $(1; 1)$. Значит, в клетку $(10; 1)$ «Кентавр» никогда не попадёт, так как 10 — чётное число.

в) Ясно, что k — чётное число, иначе сумма координат при каждом ходе будет изменяться на чётное число, а следовательно, будет оставаться чётной и никогда не станет равной 11 (сумма координат клетки в правом нижнем углу равна $10 + 1 = 11$). При $k \geqslant 5$ после первого хода «Кентавр» окажется либо в клетке $(10; 1 + k)$, либо в клетке $(1 + k; 10)$ и следующим ходом будет вынужден вернуться в клетку $(1; 1)$.

Рассмотрим $k = 4$. Тогда после первого хода «Кентавр» окажется в клетке $(5; 10)$ или $(10; 5)$. Рассмотрим первый из этих случаев. Тогда «Кентавр», не возвращаясь, сможет идти лишь одним образом: $(5; 10) \to (9; 1)$, а значит, при $k = 4$ «Кентавру» будут доступны лишь клетки $(1; 1)$, $(5; 10)$, $(9; 1)$, $(10; 5)$, $(1; 9)$.

Рассмотрим $k = 2$ (см. рис. 171 в). Не возвращаясь, «Кен тавр» сможет реализовать лишь одну из следующих цепочек: $(1; 1) \to (10; 3) \to (1; 5) \to (10; 7) \to (1; 9)$ и $(1; 1) \to (3; 10) \to (5; 1) \to (7; 10) \to (9; 1)$. Клетки, не входящие в эти цепочки, «Кентавру» недоступны.

Наконец, при $k = 0$ требуемое достигается за 1 ход: $(1; 1) \to (10; 1)$. Значит, $k = 0$ — единственное подходящее значение.

Ответ: а) да; б) нет; в) 0.

Решение варианта № 35

1. $1000 : 80 = 12\frac{1}{2}$.

То есть Никита может подарить 12 тюльпанов, но ему нужно нечётное число цветов, одиннадцать.

Ответ: 11.

2. Используя график, на оси ординат находим отметку 80 и соответствующее восьмидесяти число на оси абсцисс, это 2000.

Ответ: 2000.

3. Длину отрезка AB найдём из прямоугольного треугольника ABC, $AC = 12$, $BC = 5$ (см. рис. 172).

Из $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90°$.

$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 12^2 + 5^2$, $AB^2 = 169$, $AB = 13$.

Ответ: 13.

4. При случайном разделении учащихся на три группы по 17 человек Андрей попал в одну из них. Кроме него, в этой группе оказалось ещё 16 человек из оставшихся 50. Случайным событием является попадание Виталия в число этих 16 человек. Общее число исходов — 50 (число остальных

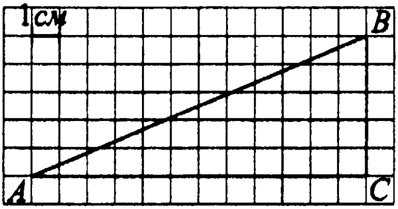


Рис. 172

учащихся без Виталия), благоприятствующих — 16, вероятность события равна $\frac{16}{50} = 0{,}32$.

Ответ: 0,32.

5. $\sin\frac{\pi(x-14)}{3} = 0{,}5$ (см. рис. 173).

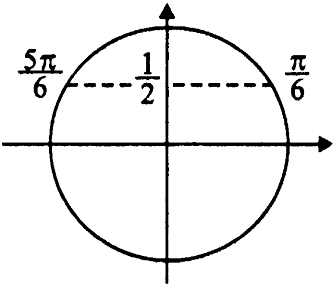


Рис. 173

$$\left[\begin{array}{l}\frac{\pi(x-14)}{3} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z,\\ \frac{\pi(x-14)}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\frac{x-14}{3} = \frac{1}{6} + 2k,\ k \in Z,\\ \frac{x-14}{3} = \frac{5}{6} + 2k,\ k \in Z;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x = 14{,}5 + 6k,\ k \in Z;\\ x = 16{,}5 + 6k,\ k \in Z.\end{array}\right.$$

При $k = -3$, $x_1 = 14{,}5 - 18 = -3{,}5$, $x_2 = 16{,}5 - 18 = -1{,}5$.

Наибольший отрицательный корень равен $-1{,}5$.

Ответ: $-1{,}5$.

6. $S_{ABCD} = \frac{AB+CD}{2}\cdot CH$, где AB и CD — основания трапеции, CH — высота (см. рис. 174). Известно, что $P_{ABCD} = 64$, тогда $AD+CB = 2AD$, $2AD = P_{ABCD} - (AB+CD)$, $2AD = 64 - (26+8) = 30$, $AD = 15$.

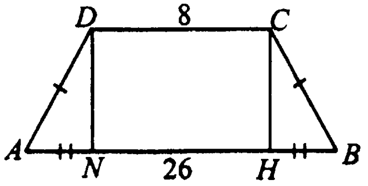


Рис. 174

$$AN = \frac{AB - DC}{2} = \frac{18}{2} = 9,$$

$$DN = \sqrt{AD^2 - AN^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12.$$

$$DN = CH, CH = 12.$$

$$S_{ABCD} = \frac{26 + 8}{2} \cdot 12 = 34 \cdot 6 = 204.$$

Ответ: 204.

7. $y = 2x + 4$ и $y = ax^2 + 8x + 7$;

$$2x + 4 = ax^2 + 8x + 7,$$

$$ax^2 + 6x + 3 = 0.$$

$$D = 36 - 12a,\ D = 0,\ 36 - 12a = 0, a = 3.$$

Ответ: 3.

8. V — объём всего сосуда, V_1 — объём жидкости, $V_ж$ — объём жидкости, которую надо долить (см. рис. 175).

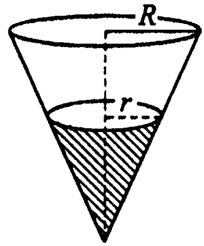


Рис. 175

$$V_ж = V - V_1.$$

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3}, V_1 = \frac{\pi r^2}{3} \cdot \frac{3}{4}h = \frac{\pi r^2 h}{4}.$$

По условию $V_1 = 54$ мл, $54 = \frac{1}{4}\pi r^2 h$, $\frac{r}{R} = \frac{\frac{3}{4}h}{h} = \frac{3}{4}$, $r = \frac{3}{4}R$.

$$54 = \frac{\pi \cdot \frac{9}{16} R^2 h}{4} = \frac{9}{64} \pi R^2 h = \frac{27}{64} \cdot \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{27}{64} V.$$

$$V = \frac{54 \cdot 64}{27} = 128.$$

$V_ж = 128 - 54 = 74$ (мл).

Ответ: 74.

9. Так как $a + 7 \geqslant 0$ и $15 - a \geqslant 0$, то
$\sqrt{(a+7)^2} + \sqrt{(a-15)^2} = (a+7) + (15-a) = 22.$

Ответ: 22.

10. В формулу $P = \sigma S T^4$ подставим исходные данные и найдём температуру звезды.

$$1{,}71 \cdot 10^{29} = 5{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{6}{125} \cdot 10^{23} \cdot T^4.$$

$$T^4 = \frac{1{,}71 \cdot 10^{29} \cdot 10^8 \cdot 125}{5{,}7 \cdot 6 \cdot 10^{23}} = \frac{171 \cdot 10^{35} \cdot 125}{57 \cdot 6 \cdot 10^{22}} = 625 \cdot 10^{12}.$$

$$T = \sqrt[4]{625 \cdot 10^{12}} = 5 \cdot 10^3 = 5000\,(K).$$

Ответ: 5000.

11. Пусть x рублей — зарплата жены, y рублей — зарплата мужа, z рублей — стипендия сына.

$(x + y + z)$ рублей — бюджет семьи.

Если зарплату мужа увеличить вдвое, общий доход семьи вырос бы на 70%.

Составим 1-е уравнение.

$x + 2y + z = 1{,}7(x + y + z).$

$y + (y + x + z) = 0{,}7(x + y + z) + (x + y + z),$

$y = 0{,}7(x + y + z),$

$$\frac{y}{x + y + z} = 0{,}7.$$

Если стипендию сына уменьшить вчетверо, то общий доход семьи сократился бы на 3%.

Составим 2-е уравнение.

$$x + y + \frac{z}{4} = 0{,}97(x + y + z),$$

$$(x + y + z) - \frac{3}{4}z = (x + y + z) - 0{,}03(x + y + z).$$

$$0{,}75z = 0{,}03(x+y+z),\ \frac{z}{(x+y+z)} = \frac{3}{75} = \frac{1}{25} = 0{,}04.$$

Таким образом, зарплата жены от общего дохода семьи составляет $1-(0{,}7+0{,}04) = 1-0{,}74 = 0{,}26$, то есть 26%.

Ответ: 26.

12. $y = \ln(x+14)^3 - 3x + 19,\ x > -14.$

$$y' = \frac{3(x+14)^2}{(x+14)^3} - 3 = \frac{3}{x+14} - 3.$$

$$y' = 0,\ \frac{3}{x+14} = 3,\ \frac{1}{x+14} = 1,\ x = -13.$$

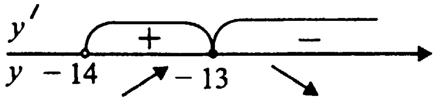


Рис. 176

Так как при переходе через точку $x = -13$ производная функции меняет знак с «+» на «−», то $x = -13$ является точкой максимума (см. рис. 176).

Ответ: -13.

13. а) $2^{3x} - 3\cdot 2^{2x} - 4\cdot 2^x + 12 = 0$, $2^{2x}\cdot(2^x-3) - 4\cdot(2^x-3) = 0$, $(2^{2x}-4)(2^x-3) = 0$, $(2^x-2)(2^x+2)(2^x-3) = 0$. Так как выражение 2^x+2 положительно при всех значениях x, то можем на него разделить обе части уравнения. $(2^x-2)(2^x-3) = 0$; $x = 1, x = \log_2 3$.

б) $1 \notin (1;2]$; $1 = \log_2 2 < \log_2 3 < \log_2 4 = 2$, значит, $\log_2 3 \in (1;2]$.

Ответ: а) 1; $\log_2 3$; б) $\log_2 3$.

14. а) В треугольнике BSD (см. рис. 177) через середину E ребра SD проведём прямую, параллельную BS, через точку O обозначим точку пересечения её с прямой BD. Тогда EO будет средней линией $\triangle BSD$, поэтому O является серединой BD.

По свойству квадрата O принадлежит диагонали AC. Соединим точки C и E и покажем, что $\triangle ACE$ является искомым сечением. $BS \parallel OE$ по построению, поэтому $BS \parallel ACE$. Кроме того, ACE проходит через точки A и E.

б) Треугольник AEC равнобедренный ($AE = EC$ из равенства $\triangle ADE$ и $\triangle CDE$), значит, медиана EO является также высотой.

$S_{AEC} = \frac{1}{2}\cdot EO\cdot AC$. По теореме Пифагора из треугольника ABC

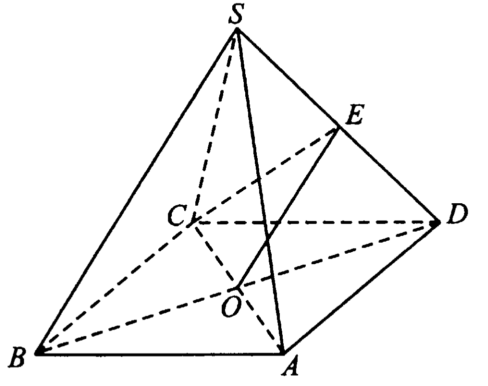


Рис. 177

получим $AC = 6$, $EO = \frac{1}{2} \cdot SB = 3{,}5$ как средняя линия треугольника SBD. $S_{AEC} = \frac{1}{2} \cdot 3{,}5 \cdot 6 = 10{,}5$.

Ответ: 10,5.

15. ОДЗ. $x \in R$.

Пусть $9^x + 3^x = t$, $t > 0$. $t^2 - 8t + 12 \leqslant 0$; $(t-2)(t-6) \leqslant 0$; $(9^x + 3^x - 2)(9^x + 3^x - 6) \leqslant 0$. Пусть теперь $3^x = u$, $u > 0$. $(u^2 + u - 2)(u^2 + u - 6) \leqslant 0$; $(u+2)(u-1)(u+3)(u-2) \leqslant 0$. Так как $u > 0$, то при всех значениях x выражения $u + 2$ и $u + 3$ положительны, значит, последнее неравенство равносильно $(u-1)(u-2) \leqslant 0$; $1 \leqslant u \leqslant 2$; $1 \leqslant 3^x \leqslant 2$; $0 \leqslant x \leqslant \log_3 2$.

Ответ: $[0; \log_3 2]$.

16. а) Пусть $AB = a$ (см. рис. 178). Треугольник ABM равнобедренный ($AB = BM = a$), $\angle ABM = \angle ABC + \angle CBM = 90° + 60° = 150°$, значит, $\angle BAM = \angle AMB = 15°$. $\angle AMC = \angle BMC - \angle AMB = 60° - 15° = 45°$.

б) Проведём высоту MH треугольника BMC (см. рис. 178). В треугольнике BMH $BM = a$, $MH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $BH = \frac{a}{2}$, $\angle BMH = 30°$. Из равенства $\angle BMK = \angle KMH = 15°$ следует, что MK — биссектриса треугольника BMH и, значит, по свойству биссектрисы треугольника $\frac{KH}{BK} = \frac{MH}{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Учитывая, что $BK + KH = BK + \frac{\sqrt{3}}{2}BK = \frac{a}{2}$, получим $BK = a(2 - \sqrt{3})$ и $KH = \frac{1}{2}a(2\sqrt{3} - 3)$. Теперь найдём KN

из треугольника KLN по теореме Пифагора. Имеем $NL = PC = \frac{a}{2}$,

$$KL = KH + HC + CL = \frac{1}{2}a(2\sqrt{3} - 3) + \frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{1}{2}a(3\sqrt{3} - 2).$$

Тогда $KN = \sqrt{KL^2 + LN^2} = a\sqrt{8 - 3\sqrt{3}}$. Подставив $a = \sqrt{8 + 3\sqrt{3}}$, получим $KN = \sqrt{37}$.

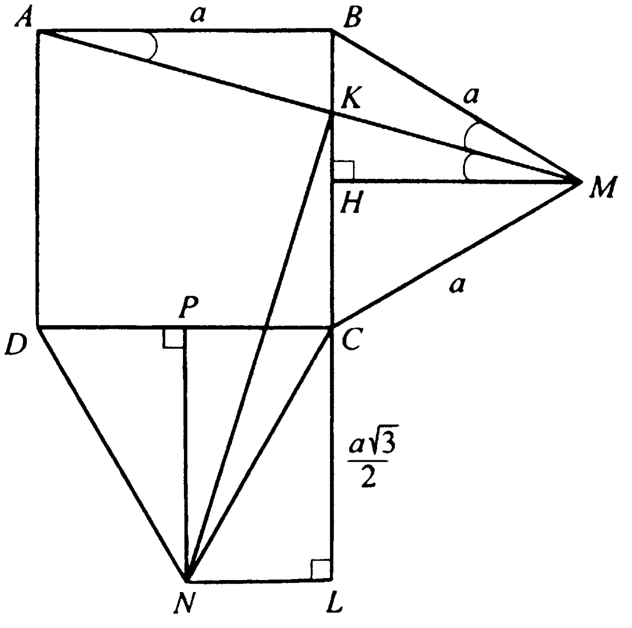


Рис. 178

Ответ: $\sqrt{37}$.

17. Пусть в первом автобусе x яблок, тогда во втором их $45 - x$. Процентное содержание яблок в 1-м автобусе находим из пропорции:

40 яблок — 100%
x яблок — t%.

Тогда $t = \dfrac{100x}{40}$. Аналогично, процентное содержание яблок во втором автобусе равно $\dfrac{100 \cdot (45 - x)}{39}$. Поэтому нужно найти значение x, при котором выражение $\left|\dfrac{x}{40} - \dfrac{45 - x}{39}\right| = \dfrac{|79x - 1800|}{40 \cdot 39}$ принимает наименьшее значение, то есть $|79x - 800|$ принимает наименьшее значение. Функция $f(x) = |79x - 1\,800|$ возрастает при $x \geqslant \frac{1\,800}{79}$ и убывает при $x \leqslant \frac{1\,800}{79}$.

Два ближайшие к $\frac{1\,800}{79}$ целых числа — это 22 и 23, так как $\frac{1800}{79} = 22\frac{62}{79}$.

Посчитав значения $f(x)$ при $x = 22$ и $x = 23$, получим, что наименьшее значение будет при $x = 23$ (так как $f(22) = 62$, $f(23) = 17$).

Ответ: 23 яблока в автобус с 40 детьми.

18. $\sqrt{4-x^2} = 2|x-a| + a$. Построим графики функций $y = \sqrt{4-x^2}$ и $y = 2|x-a| + a$. $y = \sqrt{4-x^2}$; $\begin{cases} y \geqslant 0, \\ y^2 = 4 - x^2; \end{cases}$ $\begin{cases} y \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ — верхняя полуокружность с центром $(0;0)$ и радиусом 2. График функции $y = 2|x-a|+a$ получается из графика $y = 2|x|$ параллельным переносом, при котором вершина переносится в точку $(a;a)$, то есть при изменении параметра a вершина перемещяемого графика $y = 2|x|$ движется по прямой $y = x$ (см. рис. 179).

Как видно из рисунка, единственное пересечение эти графики имеют при $a \in \{a_1\} \cup (a_2; a_3) \cup \{a_4\}$. Найдём значения a_1, a_2, a_3, a_4.

a_1 — значение параметра, при котором правая ветвь функции $y = 2|x-a| + a$ (то есть прямая $y = 2x - a$) касается данной полуокружности: $\begin{cases} 2x - a = \sqrt{4-x^2}, \\ 2 = \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}. \end{cases}$ ($2x - a = \sqrt{4-x^2}$ — условие пересечения прямой и полуокружности, $2 = \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$ — условие равенства угловых коэффициентов исходной прямой и касательной к функции $y = \sqrt{4-x^2}$).

Из второго уравнения получим $x = -\dfrac{4}{\sqrt{5}}$, тогда из первого уравнения $a_1 = -2\sqrt{5}$.

a_2 — значение параметра, при котором прямая $y = 2x - a$ проходит через точку $(-2;0)$: $0 = -4 - a$, $a_2 = -4$.

a_3 — значение параметра, при котором левая часть графика $y = 2|x-a| + a$, то есть $y = -2x + 3a$, проходит через точку $(-2;0)$: $0 = 4 + 3a$, $a_3 = -\dfrac{4}{3}$.

a_4 — ордината точки пересечения прямой $y = x$ и полуокружности $y = \sqrt{4-x^2}$, $x = \sqrt{4-x^2}$; $x = \sqrt{2}$; $a_4 = \sqrt{2}$.

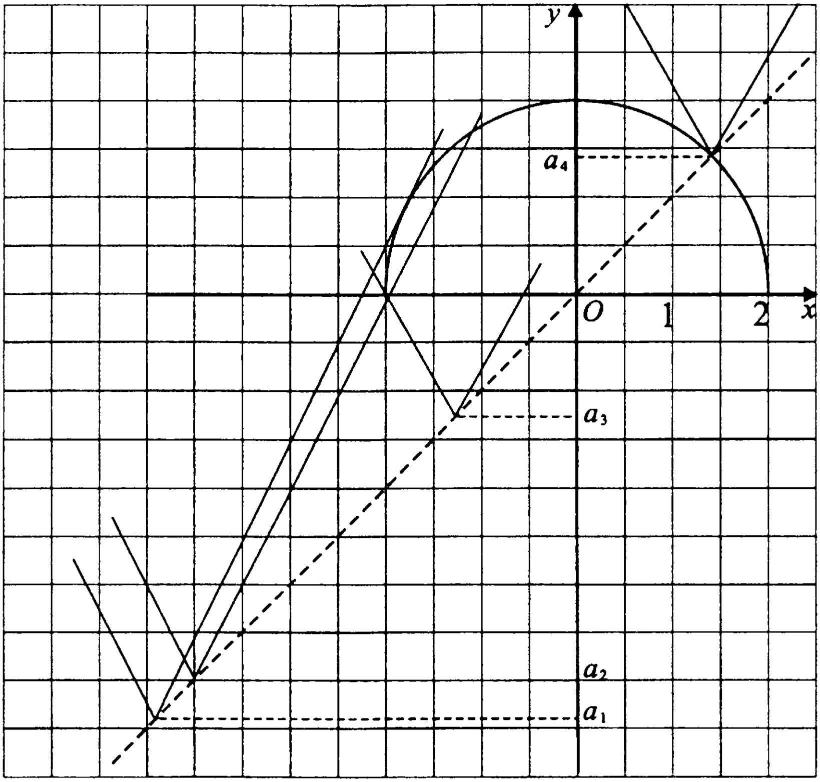


Рис. 179

Итак, $a \in \{-2\sqrt{5}\} \cup \left(-4; -\frac{4}{3}\right) \cup \{\sqrt{2}\}$.

Ответ: $\left(-4; -\frac{4}{3}\right) \cup \{-2\sqrt{5}; \sqrt{2}\}$.

19. а) Нет, не могут. Пусть разность исходной прогрессии равна d ($d \neq 0$), тогда полученных три числа равны $a_1 + 0{,}5d$, $a_1 + 1{,}5d$ и $a_1 + 2{,}5d$. Данные числа образуют геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда они ненулевые и $\dfrac{a_1 + 2{,}5d}{a_1 + 1{,}5d} = \dfrac{a_1 + 1{,}5d}{a_1 + 0{,}5d}$, $(a_1 + 2{,}5d)(a_1 + 0{,}5d) = (a_1 + 1{,}5d)^2$, $\frac{5}{4}d^2 = \frac{9}{4}d^2$, откуда $d = 0$, что противоречит условию.

б) Пусть $d \neq 0$ — разность исходной прогрессии, тогда по условию числа a_1, $a_1 + 1{,}5d$ и $a_1 + 4d$ образуют геометрическую прогрессию, значит,

$\dfrac{a_1+4d}{a_1+1{,}5d} = \dfrac{a_1+1{,}5d}{a_1}$, $a_1(a_1+4d) = (a_1+1{,}5d)^2$, $4a_1d = 3a_1d + 2{,}25d^2$,

$a_1 = 2{,}25d$, $\dfrac{a_1}{d} = 2{,}25$.

в) Если $d \neq 0$ — разность прогрессии, то после первого шага на доске будут написаны числа $a_1 + \frac{1}{2}d, a_1 + \frac{3}{2}d, a_1 + \frac{5}{2}d, \dots, a_1 + \frac{2(n-1)-1}{2}d$, а после второго — числа $a_1 + d = a_2$, $a_1 + 2d = a_3$, $a_1 + 3d = a_4, \dots$, $a_1 + (n-2)d = a_{n-1}$. Иными словами, после каждой пары шагов прогрессия лишается первого и последнего на данный момент членов. Тогда при $n = 2k$ $(k \in Z)$ после $2k-2$ шагов на доске останутся числа a_k и a_{k+1}, и после ещё одного шага получим $a_1 + \frac{2k-1}{2}d$, что при $d \neq 0$ не совпадает ни с одним из членов исходной прогрессии. При $n = 2k+1$ после $2k$ шагов получим a_{k+1}.

Ответ: а) нет б) 2,25; в) $n = 2k+1$; $k+1$, $k \in N$.

Решение варианта № 36

1. Гонорар за перевод составляет 2000 рублей, с этой суммы удерживается 13% и у студента остаётся: $2000 \cdot 0{,}87 = 1740$ (рублей). На эти деньги он хочет купить тюльпаны — нечётное количество по цене 170 руб. за штуку. Ясно, что $1740 : 170 = 10\frac{4}{17}$, то есть он может купить 10 штук тюльпанов. Но 10 — это чётное число, значит, студент покупает 9 штук.

Ответ: 9.

2. На оси ординат находим 50 Н·м и, используя график, определяем число на оси абсцисс, то есть число оборотов в минуту, оно равно 1500. Наименьшее число оборотов двигателя в минуту, при котором автомобиль начнёт движение, равно 1500.

Ответ: 1 500.

3. Из $\triangle ABC$ найдём длину отрезка AB (см. рис. 180).

$AB^2 = AC^2 + CB^2$, $AC = 15$; $CB = 8$.

$AB^2 = 225 + 64 = 289$, $AB = 17$.

Ответ: 17.

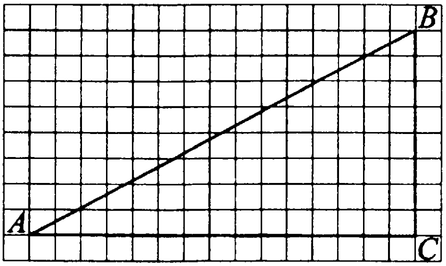


Рис. 180

4. При случайном разделении учащихся на 4 группы по 4 человека Борис попал в одну из них. Кроме него в этой группе оказалось ещё 3 человека из оставшихся 15. Случайным событием является попадание Аркадия в число этих 3 человек. Общее число исходов — 15 (число остальных учащихся без Бориса), благоприятствующих исходов — 3, вероятность события равна $\frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 0{,}2$.

Ответ: 0,2.

5. $\cos\frac{\pi(x+5)}{6} = -\frac{1}{2}$,

$$\frac{\pi(x+5)}{6} = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n,\ n \in Z.$$

$$\frac{x+5}{6} = \pm\frac{2}{3} + 2n,$$

$x + 5 = \pm 4 + 12n.$

$$\left[\begin{array}{l} x = -1 + 12n,\ n \in Z, \\ x = -9 + 12n,\ n \in Z. \end{array}\right.$$

При $n = 1$ $\left[\begin{array}{l} x = 11, \\ x = 3. \end{array}\right.$

Наименьший положительный корень равен 3.

Ответ: 3.

6. $S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot DH$ (см. рис. 181),

$$72 = \frac{3 + 15}{2} \cdot DH,$$

$$DH = \frac{72}{9} = 8,\ AH = \frac{AB - CD}{2} = \frac{15 - 3}{2} = 6.$$

Найдём AD из $\triangle ADH$: $AD = \sqrt{DH^2 + AH^2} = \sqrt{64 + 36} = 10.$

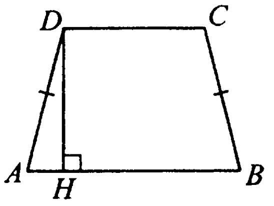


Рис. 181

$P_{ABCD} = 15 + 3 + 2 \cdot 10 = 38.$

Ответ: 38.

7. $y = 10x - 1$ и $y = 7x^2 - 4x + c$;

$10x - 1 = 7x^2 - 4x + c,$

$7x^2 - 14x + c + 1 = 0.$

$D = 0,\ 14^2 - 28 \cdot (c + 1) = 0.$

$c + 1 = 196 : 28,$

$c + 1 = 7,$

$c = 6.$

Ответ: 6.

8. Вылили из сосуда жидкость, объём ($V_ж$) которой равен разности объёмов жидкости во всём сосуде и объёма жидкости (V_1) в половине сосуда, $r = \dfrac{R}{2}$ (см. рис. 182).

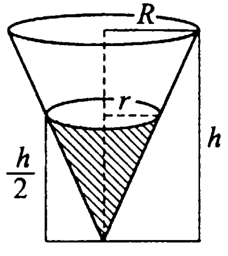


Рис. 182

$$V_ж = V - V_1 = \frac{1}{3}\pi R^2 h - \frac{1}{24}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi R^2 h \cdot \left(1 - \frac{1}{8}\right) = 160 \cdot \frac{7}{8} = 140\,(\text{мл}).$$

Ответ: 140.

9. Так как $a - 2 \geqslant 0$ и $(23 - a) \geqslant 0$, то

$\sqrt{(a-2)^2} + \sqrt{(a-23)^2} = \sqrt{(a-2)^2} + \sqrt{(23-a)^2} = (a-2) + (23-a) = 21.$

Ответ: 21.

10. $P = \sigma S T^4$, $T^4 = \dfrac{1{,}52 \cdot 10^{27} \cdot 10^8 \cdot 48}{5{,}7 \cdot 5 \cdot 10^{21}} = \dfrac{1{,}52 \cdot 10^{35} \cdot 48}{5{,}7 \cdot 5 \cdot 10^{21}} = \dfrac{48 \cdot 152 \cdot 10^{13}}{57 \cdot 5} =$

$= \dfrac{48 \cdot 152 \cdot 10^{12} \cdot 2}{57} = \dfrac{16 \cdot 4 \cdot 19 \cdot 2 \cdot 10^{12} \cdot 2}{19} = 4^4 \cdot 10^{12}$.

$T^4 = 4^4 \cdot 10^{12}$;

$T = 4 \cdot 10^3 = 4000$.

Ответ: 4 000.

11. Пусть x рублей — зарплата жены, y рублей — зарплата мужа, z рублей — стипендия сына.

$(x + y + z)$ рублей — бюджет семьи.

Если зарплату мужа увеличить втрое, то общий доход семьи вырос бы на 116%.

Составим 1-е уравнение.

$x + 3y + z = 1{,}16(x + y + z) + (x + y + z)$.

$2y = 1{,}16(x + y + z)$,

$\dfrac{y}{x + y + z} = 0{,}58$.

Если бы стипендия сына уменьшилась вдвое, то общий доход семьи уменьшился бы на 3%.

Составим 2-е уравнение.

$x + y + \dfrac{z}{2} = (x + y + z) - 0{,}03(x + y + z)$,

$(x + y + z) - \dfrac{z}{2} = (x + y + z) - 0{,}03(x + y + z)$.

$\dfrac{z}{2} = 0{,}03(x + y + z)$,

$\dfrac{z}{(x + y + z)} = 0{,}03 \cdot 2$,

$\dfrac{z}{(x + y + z)} = 0{,}06$.

Таким образом, зарплата жены от общего дохода семьи составляет $1 - (0{,}58 + 0{,}06) = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$, то есть 36%.

Ответ: 36.

12. $y = 10x - \ln(x - 7)^{10} + 131$, $x \neq 7$.

$y' = 10 - \dfrac{10}{x - 7} = \dfrac{10x - 80}{x - 7}$.

$y' = 0$ при $x = 8$.

Знаки y' и поведение y указаны на рисунке 183.

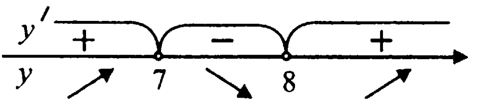


Рис. 183

Так как при переходе через точку $x = 8$ производная функции меняет знак с «−» на «+», то $x = 8$ является точкой минимума.

Ответ: 8.

13. а) $3^{3x} - 4 \cdot 3^{2x} - 3^x + 4 = 0$, $3^{2x} \cdot (3^x - 4) - (3^x - 4) = 0$, $(3^{2x} - 1)(3^x - 4) = 0$, $(3^x - 1)(3^x + 1)(3^x - 4) = 0$. Так как выражение $3^x + 1$ положительно при всех значениях x, то можем на него разделить обе части уравнения. $(3^x - 1)(3^x - 4) = 0$; $x = 0$, $x = \log_3 4$.

б) $0 \in (-0{,}5; 1]$; $\log_3 4 > \log_3 3 = 1$, значит, $\log_3 4 \notin (-0{,}5; 1]$.

Ответ: а) 0; $\log_3 4$; б) 0.

14. а) В треугольнике SBD проведём $KL \parallel SB$, тогда $BL : LD = 2 : 1$, согласно обобщённой теореме Фалеса (см. рис. 184). Пусть прямые AL и CD пересекаются в точке P. Тогда APK — искомое сечение, так как $SB \parallel APK$ и плоскость APK проходит через точки A и K.

б) $\triangle ALB \sim \triangle PLD$ по двум углам (см. рис. 185), значит, $AB : PD = BL : LD = 2 : 1$, то есть P — середина CD, $PD = 1$.

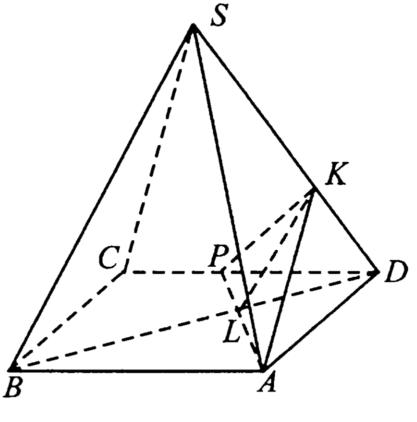


Рис. 184

Найдём PK из треугольника SCD. По теореме косинусов $\cos\angle SDC = \dfrac{SD^2 + CD^2 - SC^2}{2 \cdot SD \cdot CD} = \dfrac{1}{3\sqrt{13}}$.

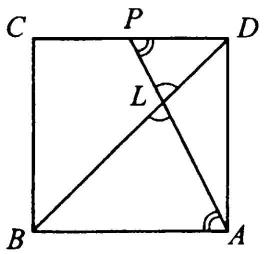


Рис. 185

По теореме косинусов из треугольника DKP получим

$KP^2 = KD^2 + PD^2 - 2 \cdot KD \cdot PD \cdot \cos\angle SDC = \frac{40}{3}$,

$KP = \sqrt{\frac{40}{3}} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{30}}{3}$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{30}}{3}$.

15. ОДЗ. $x \in R$.
Пусть $4^x - 2^{x+1} = t$, $t > 0$. $t^2 - 11t + 24 \geqslant 0$; $(t-3)(t-8) \geqslant 0$; $(4^x - 2 \cdot 2^x - 3)(4^x - 2 \cdot 2^x - 8) \geqslant 0$. Пусть теперь $2^x = u$, $u > 0$. $(u^2-2u-3)(u^2-2u-8) \geqslant 0$; $(u+1)(u-3)(u+2)(u-4) \geqslant 0$. Так как $u > 0$, то при всех значениях x выражения $u+1$ и $u+2$ положительны, значит, последнее неравенство равносильно $(u-3)(u-4) \geqslant 0$; $(2^x-3)(2^x-4) \geqslant 0$; $(2^x - 2^{\log_2 3})(2^x - 2^2) \geqslant 0$. Выражения $2^x - 2^{\log_2 3}$ и $2^x - 2^2$ совпадают по знаку с выражениями $x - \log_2 3$ и $x - 2$ соответственно, значит, последнее неравенство равносильно неравенству $(x - \log_2 3)(x-2) \geqslant 0$, откуда $x \in (-\infty; \log_2 3] \cup [2; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; \log_2 3] \cup [2; +\infty)$.

16. а) Пусть $AB = a$ (см. рис. 186). Треугольник ABM равнобедренный ($AB = BM = a$), $\angle ABM = \angle ABC + \angle CBM = 90° + 60° = 150°$, значит, $\angle BAM = \angle AMB = 15°$. Проведём высоту MH треугольника BMC (см. рис. 186). В треугольнике BMH $BM = a$, $MH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$BH = \frac{a}{2}$, $\angle BMH = 30°$. Из равенства $\angle BMK = \angle KMH = 15°$

следует, что MK — биссектриса треугольника BMH и, значит, по свойству биссектрисы треугольника $\frac{KH}{BK} = \frac{MH}{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Учитывая, что $BK + KH = BK + \frac{\sqrt{3}}{2}BK = \frac{a}{2}$, получим $BK = a(2-\sqrt{3})$. $KC = BC - BK = a(\sqrt{3}-1)$, $BK : KC = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

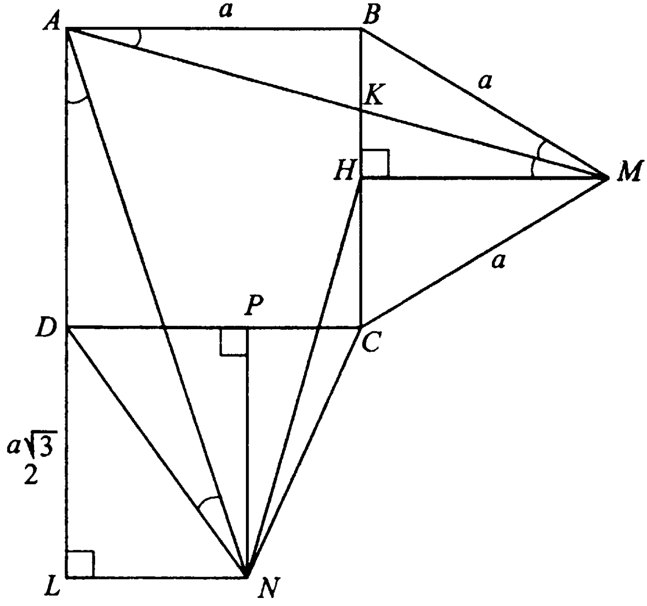


Рис. 186

б) $\triangle ADN = \triangle ABM$, значит, $\angle DAN = 15°$,
$\angle KAN = \angle DAB - \angle DAN - \angle BAK = 60°$.
$S_{KAN} = \frac{1}{2} \cdot AK \cdot AN \cdot \sin\angle KAN = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot AK \cdot AN$.

$AK^2 = AB^2 + BK^2 = a^2 + a^2(7-4\sqrt{3}) = a^2(8-4\sqrt{3})$, $AK = 2a\sqrt{2-\sqrt{3}}$;
$AN^2 = AL^2 + LN^2 = \left(a+\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2(2+\sqrt{3})$, $AN = a\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

$S_{KAN} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2a\sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot a\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$. Учитывая, что по условию $a^2 = \sqrt{3}$, получим $S_{KAN} = 1{,}5$.

Ответ: 1,5.

17. Пусть в первом автобусе у детей x пирожков с вишней, тогда во втором их $38 - x$. Нужно найти значение x, при котором выражение

$\left|\frac{x}{40} - \frac{38-x}{41}\right| = \frac{|81x-1520|}{40\cdot 41}$ принимает наименьшее значение, то есть $f(x) = |81x - 1\,520|$ принимает наименьшее значение. Ясно, что $f(x)$ возрастает при $x \geqslant \frac{1\,520}{81}$ и убывает при $x \leqslant \frac{1\,520}{81}$. Ближайшие к $\frac{1\,520}{81}$ целые числа — это 18 и 19. Посчитав значения $f(x)$ при $x = 18$ и $x = 19$, получим $f(18) = 62$ и $f(19) = 19$. Наименьшее значение будет при $x = 19$.

Ответ: 19 вишнёвых пирожков окажется в автобусе с 40 детьми.

18. $\sqrt{9-x^2} = 3|x+a| + a$. Построим графики функций $y = \sqrt{9-x^2}$ и $y = 3|x+a| + a$. $y = \sqrt{9-x^2}$; $\begin{cases} y \geqslant 0, \\ y^2 = 9 - x^2; \end{cases}$ $\begin{cases} y \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$ — верхняя полуокружность с центром $(0; 0)$ и радиусом 3. График функции $y = 3|x+a|+a$ получается из графика $y = 3|x|$, параллельным переносом, при котором вершина переносится в точку $(-a; a)$, то есть при изменении параметра a вершина перемещаемого графика модуля $y = 3|x|$ движется по прямой $y = -x$ (см. рис. 187).

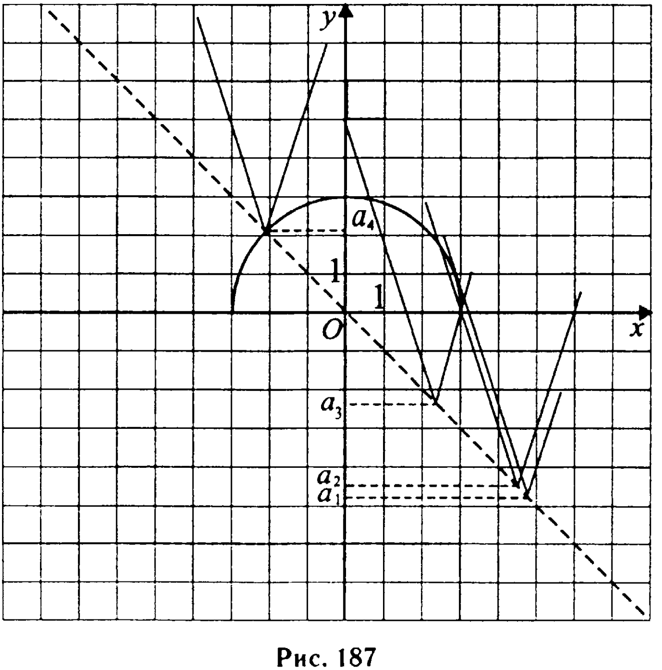


Рис. 187

Как видно из рисунка, единственное пересечение эти графики имеют при $a \in \{a_1\} \cup (a_2; a_3) \cup \{a_4\}$. Найдём значения a_1, a_2, a_3, a_4.

a_1 — значение параметра, при котором левая ветвь графика $y = 3|x + a| + a$ (то есть прямая $y = -3x - 2a$) касается данной полуокружности: $\begin{cases} -3x - 2a = \sqrt{9 - x^2}, \\ -3 = \dfrac{-x}{\sqrt{9 - x^2}}. \end{cases}$ Из второго уравнения получим $x = \dfrac{9}{\sqrt{10}}$, тогда из первого уравнения $a_1 = -\dfrac{3}{2}\sqrt{10}$.

a_2 — значение параметра, при котором прямая $y = -3x - 2a$ проходит через точку $(3; 0)$: $0 = -9 - 2a$, $a_2 = -4{,}5$.

a_3 — значение параметра, при котором правая ветвь графика $y = 3|x+a|+a$, то есть $y = 3x+4a$, проходит через точку $(3; 0)$: $0 = 9+4a$, $a_3 = -2{,}25$.

a_4 — ордината точки пересечения прямой $y = -x$ и полуокружности $y = \sqrt{9 - x^2}$, $-x = \sqrt{9 - x^2}$, $a_4 = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Итак, $a \in \{-1{,}5\sqrt{10}\} \cup (-4{,}5; -2{,}25) \cup \left\{\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right\}$.

Ответ: $(-4{,}5; -2{,}25) \cup \left\{-\dfrac{3}{2}\sqrt{10}; \dfrac{3}{2}\sqrt{2}\right\}$.

19. а) Нет, не могут. Пусть знаменатель исходной прогрессии равен q ($q \neq 0$, $q \neq 1$), тогда полученных три числа равны $b_1q^{\frac{1}{2}}$, $b_1q^{\frac{3}{2}}$ и $b_1q^{\frac{5}{2}}$ ($b_1 \neq 0$). Данные числа образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда $b_1q^{\frac{5}{2}} - b_1q^{\frac{3}{2}} = b_1q^{\frac{3}{2}} - b_1q^{\frac{1}{2}}$, $q^2 - q = q - 1$, $q^2 - 2q + 1 = 0$, $(q-1)^2 = 0$, откуда $q = 1$, что противоречит условию.

б) Пусть $q \neq 1$ — знаменатель исходной прогрессии, тогда полученные числа равны $\frac{1}{2}b_1(1 + q)$, $\frac{1}{2}b_1(q + q^2) = \frac{1}{2}b_1(1 + q) \cdot q$, $\frac{1}{2}b_1(q^2 + q^3) = \frac{1}{2}b_1(1 + q) \cdot q^2$, $\frac{1}{2}b_1(q^3 + q^4) = \frac{1}{2}b_1(1 + q) \cdot q^3$ и образуют геометрическую прогрессию со знаменателем q ($q \neq -1$, так как члены исходной прогрессии положительны, поэтому полученная последовательность ненулевая). Отношение знаменателя к знаменателю исходной прогрессии равно $\dfrac{q}{q} = 1$.

в) Если $q \neq 1$ — знаменатель прогрессии, то после первого шага на доске будут написаны числа $b_1q^{\frac{1}{2}}$, $b_1q^{\frac{3}{2}}$, $b_1q^{\frac{5}{2}}$, ..., $b_1q^{\frac{2(n-1)-1}{2}}$, а после второго — числа $b_1q = b_2$, $b_1q^2 = b_3$, $b_1q^3 = b_4$, …, $b_1q^{n-2} = b_{n-1}$. Иными словами, после каждой пары шагов прогрессия лишается первого и последнего на данный момент членов. Тогда при $n = 2k$ ($k \in N$) после $2k - 2$ шагов на доске останутся числа b_k и b_{k+1}, и после ещё одного шага получим $b_1q^{\frac{2k-1}{2}}$, что при $q \neq 1$ не совпадает ни с одним из членов исходной прогрессии. При $n = 2k + 1$ после $2k$ шагов получим b_{k+1}.

Ответ: а) нет б) 1; в) $n = 2k + 1$; $k + 1$, $k \in N$.

Решение варианта № 38

1. Пусть x — сумма, которую Мария Глебовна должна положить на счёт, тогда $0{,}95x \geqslant 3400$ и x кратно 50. Отсюда $x \geqslant \dfrac{3400 \cdot 100}{95} = 3578\dfrac{18}{19}$. Так как x кратно 50, то $x \geqslant 3600$, поэтому $x = 3600$.

Ответ: 3 600.

2. Из графика следует, что температура 30° достигается через 2 минуты после запуска двигателя, а температура 90° — через 6 минут после запуска двигателя. Поэтому от температуры 30° до температуры 90° двигатель прогрелся за $6 - 2 = 4$ (минуты).

Ответ: 4.

3. Радиус вписанной в квадрат окружности равен половине его стороны $r = \dfrac{AB}{2}$ (см. рис. 188).

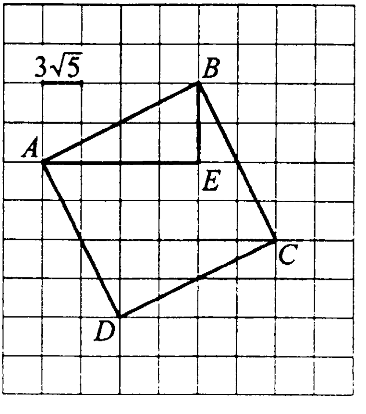


Рис. 188

По теореме Пифагора $AB^2 = BE^2 + AE^2 = (6\sqrt{5})^2 + 12(\sqrt{5})^2 = 900$; $AB = 30$. Тогда $r = \dfrac{30}{2} = 15$.

Ответ: 15.

4. Составим схему вероятностей для погоды в Чудесной стране (см. рис. 189).

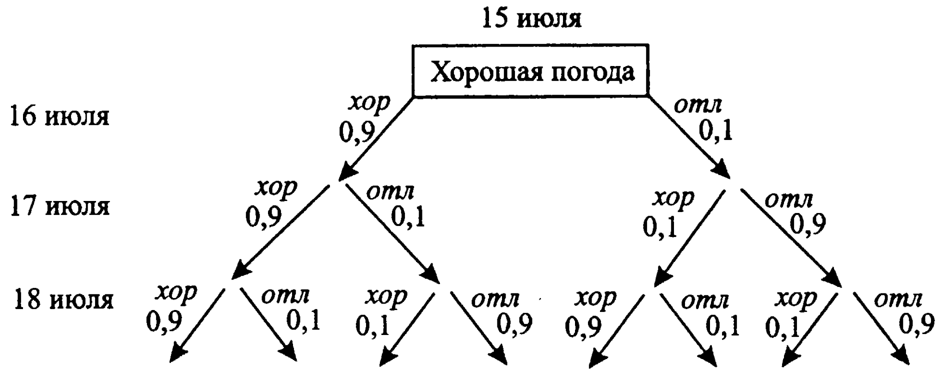


Рис. 189

Из схемы по формулам суммы и произведения вероятностей видно, что вероятность того, что 18 июля в Чудесной стране снова будет хорошая погода, равна
$0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 + 0{,}9 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}756$.

Ответ: 0,756.

5. $\log_{x+11} 625 = 4$; $4\log_{x+11} 5 = 4$; $\log_{x+11} 5 = 1$; $x + 11 = 5$; $x = -6$.

Проверка: $\log_{-6+11} 625 = \log_5 5^4 = 4\log_5 5 = 4.\ 4 = 4$.

Ответ: -6.

6. $S_{ABC} = pr$, где $p = \dfrac{AB + BC + AC}{2} = \dfrac{15 + 15 + 18}{2} = 24$ — полупериметр, а $r = OK$ — радиус вписанной окружности треугольника ABC (см. рис. 190), O принадлежит биссектрисе CK, а значит, и высоте $\triangle ABC$.

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot CK}{2}.\ CK = \sqrt{AC^2 - AK^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{144} = 12.$$

Значит, $S_{ABC} = \dfrac{18 \cdot 12}{2} = 108$.

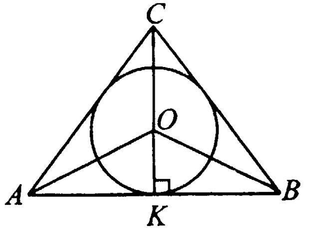


Рис. 190

Итак, $r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{108}{24} = \frac{9}{2} = 4{,}5.$

Ответ: 4,5.

7. Касательная $y = 7x + 3$ к параболе $y = 8x^2 + bx + 11$ имеет с параболой единственную общую точку. Поэтому квадратное уравнение $7x + 3 = 8x^2 + bx + 11$; $8x^2 + x(b - 7) + 8 = 0$ имеет единственное решение при дискриминанте D, равном нулю.

$D = (b - 7)^2 - 4 \cdot 64 = 0$; $(b - 7)^2 = 4 \cdot 64$; $b - 7 = \pm(2 \cdot 8)$. Если $b - 7 = 2 \cdot 8$, то $b_1 = 23$. Если $b - 7 = -2 \cdot 8$, то $b_2 = -9$.

При $b = -9$ абсциссу точки касания находим из уравнения $8x^2 + x \cdot (-9 - 7) + 8 = 0$; $8x^2 - 16x + 8 = 0$; $x^2 - 2x + 1 = 0$; $(x - 1)^2 = 0$; $x = 1$. Так как это значение x больше 0, то $b = -9$ не удовлетворяет условию.

При $b = 23$ абсциссу точки касания находим из уравнения $8x^2 + x \cdot (23 - 7) + 8 = 0$; $8x^2 + 16x + 8 = 0$; $x^2 + 2x + 1 = 0$; $(x + 1)^2 = 0$; $x = -1$. Так как это значение x меньше 0, то $b = 23$ удовлетворяет условию.

Ответ: 23.

8. Пусть ребро куба равно a. Тогда площадь его поверхности равна $6a^2$. Если каждое ребро куба увеличить на 9, площадь его поверхности будет равна $6(a + 9)^2$ и по сравнению с первоначальной увеличится на 810:

$6(a + 9)^2 - 6a^2 = 810;$

$(a + 9)^2 - a^2 = 135;$

$(a + 9 - a)(a + 9 + a) = 135;$

$2a + 9 = 15;$

$a = 3.$

Ответ: 3.

9. $\dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt[5]{m}\cdot\sqrt[20]{m}}=\dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt[20]{m^4}\cdot\sqrt[20]{m}}=\dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt[20]{m^5}}=\dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt[4]{m}}=\sqrt[4]{m}$. Так как $m=1\,296$, то $\sqrt[4]{m}=\sqrt[4]{1\,296}=\sqrt[4]{6^4}=6$.

Ответ: 6.

10. По условию $A(\omega)-A_0\leqslant\dfrac{576}{100}A_0$, $A(\omega)\leqslant\dfrac{676}{100}A_0$, $\dfrac{A_0\cdot\omega_p^2}{|\omega_p^2-\omega^2|}\leqslant 6{,}76A_0$.

Так как по условию $\omega<\omega_p$ и $A_0>0$, то $\dfrac{\omega_p^2}{\omega_p^2-\omega^2}\leqslant 6{,}76$;

$\omega_p^2\leqslant 6{,}76\omega_p^2-6{,}76\omega^2$; $6{,}76\omega^2\leqslant 5{,}76\omega_p^2$; $\omega\leqslant\omega_p\sqrt{\dfrac{576}{676}}$; $\omega\leqslant\dfrac{12}{13}\omega_p$.

Так как $\omega_p=416\ \text{с}^{-1}$, то $\omega\leqslant\dfrac{12}{13}\cdot 416\ (\text{с}^{-1})$; $\omega\leqslant 384\ (\text{с}^{-1})$.

Ответ: 384.

11. Пусть первый сухогруз проходит расстояние x метров за 9 минут, тогда его скорость $\dfrac{x}{9}$ (м/мин). Второй сухогруз проходит расстояние $360+140+80+500+x$ (м) тоже за 9 минут, то есть его скорость $\dfrac{1080+x}{9}$ (м/мин).

Отсюда скорость второго сухогруза больше скорости первого сухогруза на $\dfrac{1080+x}{9}-\dfrac{x}{9}=\dfrac{1080}{9}=120$ (м/мин) $=120\cdot\dfrac{\frac{1}{1000}}{\frac{1}{60}}=7{,}2$ (км/ч).

Ответ: 7,2.

12. $y'=\left(-\dfrac{x}{x^2+1024}\right)'=-\dfrac{x^2+1024-2x\cdot x}{(x^2+1024)^2}=-\dfrac{1024-x^2}{(x^2+1024)^2}=$
$=\dfrac{x^2-1024}{(x^2+1024)^2}$.

$y'=0$; $x^2-1024=0$; $x=\pm 32$.

Из рисунка 191 видно, что $x=32$ — точка минимума.

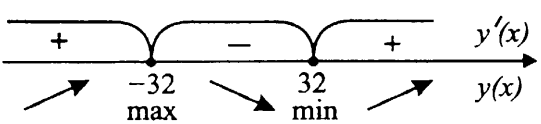


Рис. 191

Ответ: 32.

13. а) Преобразуем обе части уравнения, получим $5^{\cos 2x} = 5^{\cos^2 x}$ и, следовательно, $\cos 2x = \cos^2 x$;

$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x$; $\sin^2 x = 0$; $\sin x = 0$; $x = \pi k$, $k \in Z$.

б) Заметим, что $3 < \pi < 3{,}5$, тогда при $k \geqslant -1$ выполняется неравенство $\pi k \geqslant -\pi > -3{,}5$, значит, при $k \geqslant -1$ значения $x = \pi k$ не принадлежат рассматриваемому промежутку.

При $k = -2$ и $k = -3$ получим $x = -2\pi$ и $x = -3\pi$ соответственно, при этом $-2\pi < -2 \cdot 3 = -6$, $-2\pi > -2 \cdot 3{,}5 = -7$ и $-3\pi < -3 \cdot 3 = -9$, $-3\pi > -3 \cdot 3{,}5 = -10{,}5$. Таким образом, значения $x = -2\pi$ и $x = -3\pi$ принадлежат рассматриваемому промежутку.

При $k \leqslant -4$ получим $\pi k \leqslant -4\pi < -4 \cdot 3 = -12$, значит, значение $x = \pi k$ не принадлежат рассматриваемому промежутку.

Ответ: -3π; -2π.

14. а) Пусть радиус основания равен r, O — центр основания (см. рис. 192).

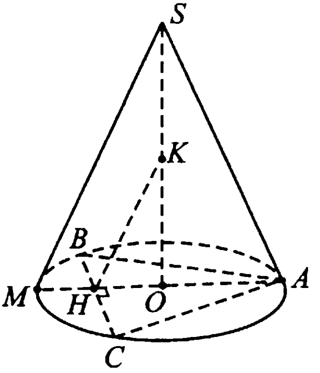


Рис. 192

Рассмотрим правильный $\triangle ABC$. Пусть $AH \perp BC$, H лежит на BC (см. рис. 193).

Тогда $AO : OH = 2 : 1$ по свойству точки пересечения медиан, $AO = r$, где r — радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$. Значит, $OH = \frac{r}{2}$. Рассмотрим осевое сечение конуса плоскостью, проходящей через высоту OS и прямую OH (см. рис. 194).

В сечении получим равносторонний $\triangle MSA$, $MA = 2r = SA$, $OS = \frac{MA\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$. Пусть K — середина OS, $OK = \frac{r\sqrt{3}}{2}$, $\triangle OKH$ —

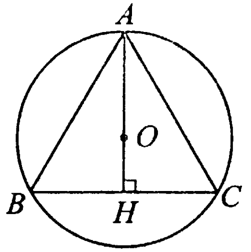


Рис. 193

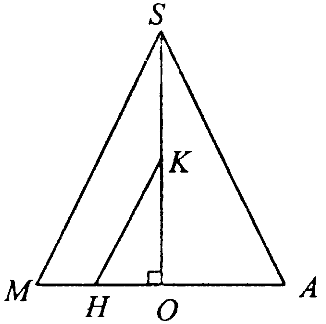


Рис. 194

прямоугольный, $\operatorname{tg}\angle KHO = \dfrac{OK}{OH} = \sqrt{3}$, $\angle KHO = 60°$, $\angle HKO = 30°$. $OH \perp BC$ и является проекцией KH на плоскость основания конуса. Значит, $KH \perp BC$ и угол KHO — линейный угол двугранного угла между плоскостью α и плоскостью основания конуса. Таким образом, угол между плоскостью α и плоскостью основания конуса равен $60°$, что и требовалось доказать.

б) Рассмотрим шар, вписанный в конус, и осевое сечение, описанное выше (см. рис. 195).

В сечении шара получим окружность, центр которой в точке Q (точке пересечения медиан $\triangle MSA$), $OQ : QS = \dfrac{1}{2}$, $OS = \dfrac{2r \cdot \sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3} = 12$. Тогда $QS = 8$, $OQ = 4$ — радиус вписанного шара. Отсюда $QK = QS - KS = 8 - \dfrac{12}{2} = 2$. Опустим $QQ' \perp HK$, Q' лежит на HK.

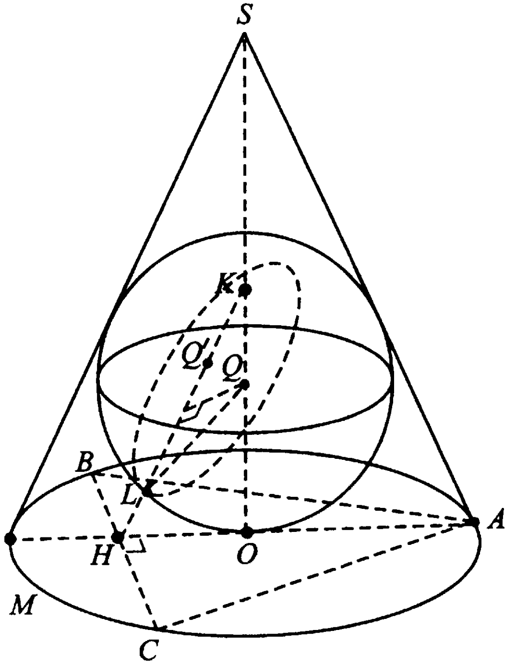


Рис. 195

Из прямоугольного треугольника $QQ'K$ получим $\dfrac{QQ'}{QK} = \sin\angle Q'KQ$; $QQ' = QK\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}\cdot 2 = 1$. Проведём радиус QL, как показано на рисунке 196 (L — точка пересечения шара с прямой HK).

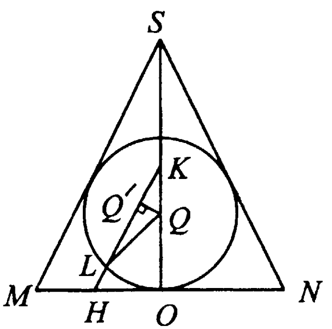


Рис. 196

Из $\triangle QQ'L$ найдём $Q'L^2 = QL^2 - QQ' = 4^2 - 1^2 = 15$. Но $Q'L$ — радиус круга, являющегося пересечением шара и плоскости α. Тогда площадь сечения равна $\pi Q'L^2 = 15\pi$.

Ответ: 15π.

15. ОДЗ $\begin{cases} x+5>0, \\ x+5\neq 1, \\ x^2+7x+12>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>-5, \\ x\neq -4, \\ x^2+7x+12>0. \end{cases}$

Решая неравенство $x^2+7x+12>0$, получаем $x \in (-\infty; -4) \cup (-3; +\infty)$.

Отсюда найдём ОДЗ: $x \in (-5; -4) \cup (-3; +\infty)$.

Исходное неравенство преобразуем на ОДЗ, получим

$$\frac{\ln(x^2+7x+12)}{\ln\frac{1}{2}} > \frac{\ln(x^2+7x+12)}{\ln(x+5)};$$

$$\ln(x^2+7x+12)\left(\frac{1}{\ln\frac{1}{2}} - \frac{1}{\ln(x+5)}\right) > 0;$$

$$\ln(x^2+7x+12)\left(\frac{\ln(x+5) - \ln\frac{1}{2}}{\ln\frac{1}{2}\ln(x+5)}\right) > 0;$$

$$\frac{\ln(x^2+7x+12)\ln(2(x+5))}{\ln\frac{1}{2}\ln(x+5)} > 0.$$

Заметим, что $e > 1$, $\frac{1}{2} < 1$ и поэтому $\ln\frac{1}{2} < 0$. Следовательно,

$$\frac{\ln(x^2+7x+12)\ln(2(x+5))}{\ln(x+5)} < 0.$$

Последнее неравенство на ОДЗ равносильно неравенству

$$\frac{((x^2+7x+12)-1)((2x+10)-1)}{(x+5)-1} < 0;$$

$$\frac{(x^2+7x+11)(2x+9)}{x+4} < 0.$$

Решим вспомогательное уравнение $x^2+7x+11 = 0$, получим $x_{1,2} = \dfrac{-7\pm\sqrt{5}}{2}$.

Учитывая, что $4<5<9$ и $2<\sqrt{5}<3$, получим

$$-5 < \frac{-7-\sqrt{5}}{2} < -4{,}5; \quad -2{,}5 < \frac{-7+\sqrt{5}}{2} < -2.$$

Тогда неравенство $\dfrac{(x^2+7x+11)(2x+9)}{x+4} < 0$ примет вид

$$\frac{\left(x-\dfrac{-7-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\dfrac{-7+\sqrt{5}}{2}\right)(x+4{,}5)}{x+4}<0.$$

Воспользуемся методом интервалов (см. рис. 197), получим $x\in\left(\frac{-7-\sqrt{5}}{2};-4{,}5\right)\cup\left(-4;\frac{-7+\sqrt{5}}{2}\right)$.

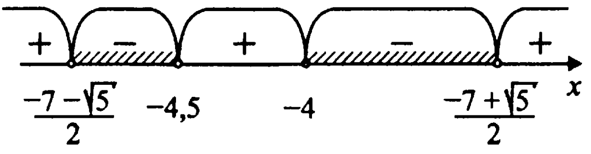


Рис. 197

Тогда с учётом ОДЗ запишем решение исходного неравенства: $x\in\left(\frac{-7-\sqrt{5}}{2};-4{,}5\right)\cup\left(-3;\frac{-7+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Ответ: $\left(\frac{-7-\sqrt{5}}{2};-4{,}5\right)\cup\left(-3;\frac{-7+\sqrt{5}}{2}\right)$.

16. а) Изобразим правильный пятиугольник $LKMNP$, проведём диагонали LM и KN (см. рис. 198).

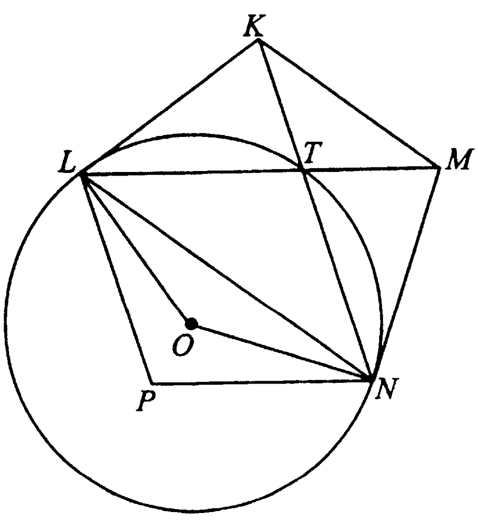


Рис. 198

Сумма углов выпуклого пятиугольника равна $(5-2)\cdot 180^\circ = 540^\circ$, значит, углы равны $\frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$. Заметим, что $\triangle LPN = \triangle KMN$ по двум сторонам и углу между ними, при этом они равнобедренные. Тогда $\angle NLP = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ = \angle KNM$. Отсюда $\angle TLN = 108^\circ - 36^\circ - 36^\circ = 36^\circ$. Аналогично $\angle TNL = 36^\circ$. Следовательно, $\angle LTN = 180^\circ - 36^\circ - 36^\circ = 108^\circ$ и $\triangle LTN$ — равнобедренный. Так как вписанный угол $TLN = 36^\circ$, то $\smile TN = 72^\circ$, а угол между хордой TN и прямой NM равен половине этой дуги, то есть $\angle KNM = 36^\circ$. $\smile TL = \smile TN = 72^\circ$, $\angle LON = 144^\circ$ — как центральный, опирающийся на дугу 144°, $\angle ONL = \angle OLN = 18^\circ$. Отсюда $\angle ONM = 18^\circ + 36^\circ + 36^\circ = 90^\circ$. Значит, NM — касательная по признаку касательной, что и требовалось доказать.

б) Ясно, что $LK = MN$ и $LM = KN$, так как пятиугольник правильный. $\triangle LTN = \triangle LPN$ по общей стороне LN и двум прилегающим к ним углам. ($\angle TNL = \angle TLN = \angle NLP = \angle LNP = 36^\circ$). Тогда $LP = PN = LT = TN$. Но $LP = LK = MN$, так как пятиугольник правильный. По свойству касательной и секущей, проведённых из одной точки, $MN^2 = ML \cdot TM$; $16 = ML(ML-4)$; $ML^2 - 4ML - 16 = 0$, $ML = 2 \pm \sqrt{20} = 2 \pm 2\sqrt{5}$, $ML > 0$, $ML = 2 + 2\sqrt{5} = 2(1+\sqrt{5})$.

Ответ: б) $2(1+\sqrt{5})$.

17. Пусть в магазин завезли $n > 0$ пачек печенья, а к концу дня реализовали $x\%$ пачек клубничного печенья. Тогда с утра было завезено $\frac{8}{8+1+3}n = \frac{2n}{3}$ пачек клубничного печенья, $\frac{1}{8+1+3}n = \frac{n}{12}$ пачек кокосового печенья и $\frac{3}{8+1+3}n = \frac{n}{4}$ пачек малинового печенья.

Из условия следует, что всего было реализовано $0{,}7n$ пачек печенья, при этом было продано $0{,}6 \cdot \frac{n}{4}$ пачек малинового печенья, $0{,}6 \cdot \frac{n}{12}$ — кокосового, $\frac{x}{100} \cdot \frac{2}{3}n$ — клубничного печенья. Определим x из уравнения

$0{,}7n = 0{,}6\cdot\frac{n}{4} + 0{,}6\cdot\frac{n}{12} + \frac{x}{100}\cdot\frac{2}{3}n$; $0{,}7 = 0{,}6\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right) + \frac{x}{150}$; $0{,}7 = 0{,}2 + \frac{x}{150}$;

$x = 0{,}5 \cdot 150 = 75$. Значит, было реализовано 75% пачек клубничного печенья.

Ответ: 75.

18. Рассмотрим неравенство $y^2 - x^2 \geqslant 0$, $(y-x)(y+x) \geqslant 0$. Значит, либо $y = x$, либо $y = -x$, либо $y > x$, $y > -x$, либо $y < x$, $y < -x$. Изобразим штриховкой решение этого неравенства на плоскости (см. рис. 199).

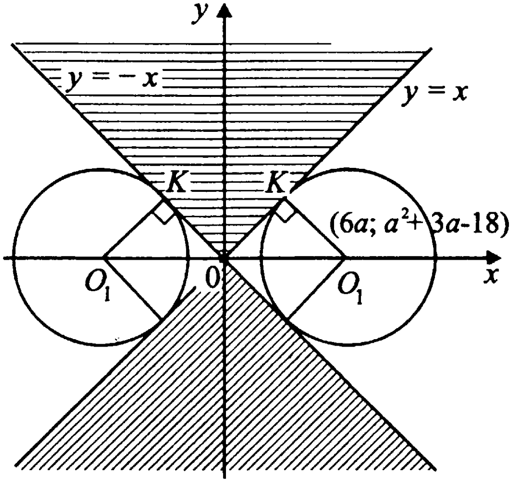


Рис. 199

Второе уравнение исходной системы определено при $a \neq 0$ и задаёт окружность с центром в точке $(6a; a^2 + 3a - 18)$ и радиусом $\sqrt{3|a|^{-\frac{a}{2}}} = \sqrt{3}|a|^{-\frac{a}{4}}$, так как $3|a|^{-\frac{a}{2}} > 0$ для всех $a \neq 0$.

Из рисунка видно, что ровно два решения будут в том и только в том случае, когда окружность вписана в один из незаштрихованных углов. Для этого необходимо, чтобы её центр лежал на биссектрисе одного из этих углов, то есть на прямой $y = 0$. Но тогда $a^2 + 3a - 18 = 0$ и $a = -6$ или $a = 3$.

Пусть x_c — абсцисса центра окружности, R — её радиус ($x_c \neq 0$, так как $a \neq 0$). Так как $x_c \neq 0$, то $\triangle OKO_1$ — равнобедренный прямоугольный ($\angle O_1KO = 90°$, радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной, $\angle O_1OK = 45°$, OK — биссектриса координатного угла).

Но тогда $R = O_1K = \dfrac{OO_1}{\sqrt{2}} = \dfrac{|x_c|}{\sqrt{2}}$. Таким образом, должно выполняться условие $\sqrt{3}|a|^{-\frac{a}{4}} = \frac{|6a|}{\sqrt{2}}$, то есть $|a|^{-\frac{a}{4}} = |a|\sqrt{6}$. Последнее условие выполнено при $a = -6$ и не выполнено при $a = 3$. При $a = -6$ получим $x_c = -36 \neq 0$.

Ответ: -6.

19. а) Заметим, что $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ — все эти числа не делятся на 8 нацело. При $n = 4$ получим $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, $\frac{n!}{8} = 3 \in N$. При $n > 4$, соответственно, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n = 24 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n$. Отсюда $\frac{n!}{8} = 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n \in N$. Значит, наибольшее подходящее значение $n = 3$.

б) $(n+2)! - 42(n!) = n!(n+1)(n+2) - 42(n!) = n!((n+1)(n+2) - 42)$, $n!(n^2 + 3n - 40) < 0$; $n^2 + 3n - 40 < 0$; $-8 < n < 5$.
Наибольшее подходящее значение $n = 4$.

в) Ясно, что при $n \geqslant 13$ число $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 13 \cdot \ldots \cdot n$ делится на 13, а тогда и $(n!)^2 - 12(n!) = n!(n! - 12)$ делится на 13.

Покажем, что $12! - 12$ делится на 13.

Действительно,
$12! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot (13-6)(13-5)(13-4)(13-3)(13-2)(13-1) =$
$= 720 \cdot (13n + 720)$, где n — некоторое целое число.

В свою очередь, $720 = 13 \cdot 55 + 5$, поэтому
$12! = (13 \cdot 55 + 5)(13n + 13 \cdot 55 + 5) = 13 \cdot v + 25$, где v — также некоторое целое число.

Отсюда $12! - 12 = 13 \cdot v + 25 - 12 = 13v + 13 = 13 \cdot (v + 1)$, то есть $12! - 12$ делится на 13.

Покажем теперь, что при $n = 11$ число $n!(n! - 12)$ не делится на 13.

Действительно, в разложении $11!$ на простые сомножители числа 13 не будет.

Предположим, что $11! - 12 = 13s$, где s — некоторое целое число.
Так же, как и для числа $12!$, получаем $11! = 720 \cdot (13t - 720)$, где t — некоторое число и тогда $11! = (13 \cdot 55 + 5)(13t - 13 \cdot 55 - 5) = 13k - 25$, где k — некоторое целое число.

Поэтому
$11! - 12 = 13k - 25 - 12 = 13k - 27 = 13k - 26 - 1 = 13(k-2) - 1 = 13s$.

Отсюда следует, что 1 делится на 13.

Получаем противоречие, что и доказывает, что $11!(11! - 12)$ не делится на 13.

Ответ: а) 3; б) 4; в) 11.

Решение варианта № 39

1. $2 \cdot 4 = 8$ (паанги) за 2 кг моллюсков,

$8 \cdot 27{,}2 = 217{,}6$ (руб).

$217{,}6 \approx 218$.

Ответ: 218.

2. Используя график, определяем количество граммов реагента, которое не вступило в реакцию, за четыре минуты. Оно равно 8, тогда масса реагента, которая вступила в реакцию, равна $24 - 8 = 16$.

Ответ: 16.

3. $S_{\substack{\text{закрашенной}\\ \text{фигуры}}} = S_{\text{круга}} - \frac{1}{8}S_{\text{круга}} = \frac{7}{8}S_{\text{круга}}$.

$S_{\substack{\text{закрашенной}\\ \text{фигуры}}} = \frac{7}{8}\pi \cdot 36 = 31{,}5\pi$.

В ответе $\frac{S}{\pi} = \frac{31{,}5\pi}{\pi} = 31{,}5$.

Ответ: 31,5.

4. Вероятность того, что абитуриент не сможет набрать 65 баллов ни по физике, ни по информатике, равна $(1-0{,}5)(1-0{,}6) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}2$. Следовательно, хотя бы по одному из этих двух предметов он получит 65 баллов с вероятностью $1 - 0{,}2 = 0{,}8$. Для поступления надо набрать требуемый балл по математике, русскому языку и хотя бы по одному предмету из информатики и физики. Вероятность поступления равна $0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}336$.

Ответ: 0,336.

5. $\operatorname{tg}\frac{(x+10)\pi}{3} = -\sqrt{3}$.

$\frac{(x+10)\pi}{3} = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi n,\ n \in Z;$

$\frac{(x+10)\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z;\ \frac{(x+10)}{3} = -\frac{1}{3} + n,\ n \in Z;$

$x + 10 = -1 + 3n, n \in Z;\ x = -11 + 3n, n \in Z.$

$-11 + 3n < 0,\ n < 3\frac{2}{3},\ n_1 = 3.$

$x = -11 + 9 = -2.$

Итак, наибольший отрицательный корень равен -2.

Ответ: -2.

6. $S_\Delta = p \cdot r$, где p — полупериметр, r — радиус вписанной окружности (см. рис. 200).

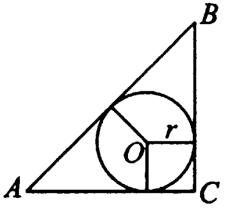


Рис. 200

$$S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{AC^2}{2}\ (AC = BC).$$

$$\frac{AC^2}{2} = \frac{2AC + AB}{2} \cdot r,\ r = \frac{AC^2}{2AC + AB};$$

$$AB = \sqrt{2AC^2} = AC\sqrt{2},\ AB = (46 + 23\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2} = 23\sqrt{2}(2 + \sqrt{2}).$$

$$r = \frac{(46 + 23\sqrt{2})^2}{2(46 + 23\sqrt{2}) + 23\sqrt{2}(2 + \sqrt{2})} = \frac{(46 + 23\sqrt{2})^2}{(46 + 23\sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} = 23$$

Ответ: 23.

7. $F'(x) = f(x)$, $F'(x) = 0$ в точках максимума и минимума, таких точек 6 на указанном промежутке.

Ответ: 6.

8. Плоскости MON, NO_1P, KOP и KO_1M отсекают от тетраэдра $DABC$ тетраэдры $DMON$, BNO_1P, $CKOP$, AKO_1M (см. рис. 201), каждый из которых подобен тетраэдру $DABC$ с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$. Значит, объём каждого из отсечённых тетраэдров будет равен $\frac{24}{2^3} = 3$. $V_{NMOPO_1K} = 24 - 3 \cdot 4 = 12$.

Ответ: 12.

9. $$\frac{P(b)}{P\left(\frac{1}{b}\right)} = \frac{\left(b + \frac{18}{b}\right)\left(18b + \frac{1}{b}\right)}{\left(\frac{1}{b} + 18b\right)\left(\frac{18}{b} + \frac{1}{\frac{1}{b}}\right)} = \frac{\left(b + \frac{18}{b}\right)\left(18b + \frac{1}{b}\right)}{\left(\frac{1}{b} + 18b\right)\left(\frac{18}{b} + b\right)} = 1.$$

Ответ: 1.

10. $pV^k = \text{const}$, $\text{const} = 7{,}29 \cdot 10^9$ Па·м^5.

$k = 53$,

$p \geqslant 3 \cdot 10^7$ Па.

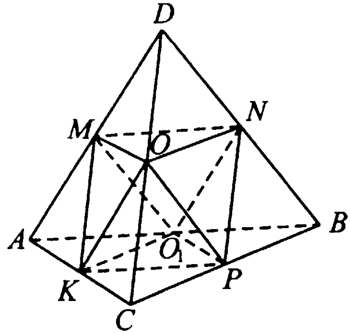


Рис. 201

$pV^k = 7{,}29 \cdot 10^9$, $p = \dfrac{7{,}29 \cdot 10^9}{V^k}$, $\dfrac{7{,}29 \cdot 10^9}{V^k} \geqslant 3 \cdot 10^7$,

$V^k \leqslant \dfrac{7{,}29 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^7}$, $\dfrac{7{,}29 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^7} = \dfrac{729}{3} = 243$.

$V^k \leqslant 243$, $V^k \leqslant 3^5$; $V^{\frac{5}{3}} \leqslant 3^5$, $V \leqslant \sqrt[5]{(3)^{15}} = 27$.
$V \leqslant 27$.

Наибольший объём газа равен 27.

Ответ: 27.

11. Кольцевая трасса имеет протяжённость 6 км. Грузовикам необходимо проехать 40 кругов, то есть преодолеть расстояние $6 \cdot 40 = 240$ (км). Обозначим x км/ч ($x > 0$) — скорость первого грузовика, а y км/ч ($y > 0$) — скорость второго грузовика, тогда $\dfrac{240}{x}$ — время первого грузовика, $\dfrac{240}{y}$ — время второго грузовика. Разность между временем второго и первого грузовиков равна 2 часа 42 минуты, или 2,7 часа. $\left(2\dfrac{42}{60} = 2\dfrac{7}{10}\text{ ч}\right)$.

Составим уравнение $\dfrac{240}{y} - \dfrac{240}{x} = 2{,}7$, $\dfrac{240(x-y)}{xy} = 2{,}7$, $240(x-y) = 2{,}7xy$.

Во втором условии сказано, что первый грузовик обогнал второго на 1 круг за 20 минут, или $\dfrac{20}{60}$ ч$= \dfrac{1}{3}$ часа.

Составим второе уравнение $\dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3}y = 6$, $x - y = 18$.

Получим систему уравнений $\begin{cases} 80(x-y)=0{,}9xy, \\ x-y=18. \end{cases}$

$$\begin{cases} 80\cdot(18+y-y)=0{,}9y(18+y), \\ x=18+y. \end{cases}$$

$80\cdot 18 = 0{,}9\cdot 18y + 0{,}9y^2;$

$1440 = 16{,}2y + 0{,}9y^2;$

$0{,}9y^2 + 16{,}2y - 1440 = 0,$

$y^2 + 18y - 1600 = 0,$

$y_1 = -9+41 = 32,\ y_2 = -9-41 = -50.$

Так как $y > 0$, то $y = 32$.

$x = 18 + 32 = 50.$

Скорость первого грузовика равна 50 км/ч.

Ответ: 50.

12. $y = 6\operatorname{tg} x - 8x + 2\sqrt{3} - 7 - \frac{4\pi}{3}$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

$y' = \frac{6}{\cos^2 x} - 8,\ y' = 0$ при $\cos^2 x = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

$\cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2};$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z; \\ x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z. \end{array}\right.$$

Отрезку $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ принадлежит $x = \pm\frac{\pi}{6}$.

$$y\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -2\sqrt{3}+8\frac{\pi}{6}+2\sqrt{3}-7-\frac{4\pi}{3} = -2\sqrt{3}+\frac{4\pi}{3}+2\sqrt{3}-7-\frac{4\pi}{3} = -7.$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 6-\frac{8\pi}{4}+2\sqrt{3}-7-\frac{4\pi}{3} = 6+2\sqrt{3}-7-\frac{10\pi}{3} = -1+2\sqrt{3}-\frac{10\pi}{3}$$

(см. рис. 202).

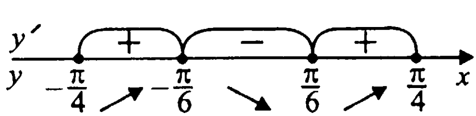


Рис. 202

Так как $\sqrt{3} < 1{,}8$, а $\pi > 3$, то

$$-1 + 2\cdot\sqrt{3} - \frac{10\pi}{3} < -1 + 2\cdot 1{,}8 - \frac{10\cdot 3}{3} = -7{,}4.$$

Наибольшее значение функции $y = 6\operatorname{tg} x - 8x + 2\sqrt{3} - 7 - \frac{4\pi}{3}$ на $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ равно -7.

Ответ: -7.

13. а) Преобразуем уравнение к виду $\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{3\sqrt{2}}{\sin x} + 2 = 0$.

Сделаем замену $t = \frac{\sqrt{2}}{\sin x}$ при $\sin x \neq 0$.

Тогда для новой переменной t получим квадратное уравнение $t^2 - 3t + 2 = 0$, корни которого $t_1 = 1$ и $t_2 = 2$.

Получаем $\left[\begin{array}{l} \sin x = \sqrt{2}, \\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{array}\right.$

Первое уравнение совокупности не имеет действительных решений, решение второго: $x = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k = (-1)^k\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$.

б) Пусть $x_0 = \frac{\pi}{4}$ (см. рис. 203),

$x_1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

На единичной окружности ординаты этих корней равны $\frac{\sqrt{2}}{2}$, то есть минимальное расстояние между двумя несовпадающими точками, соответствующими корням уравнения, есть модуль разности их абсцисс, то есть $p = |\cos x_1 - \cos x_0|$.

Но $|\cos x| = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, тогда $\cos x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, а $p = |\cos x_1 - \cos x_0| = \sqrt{2}$.

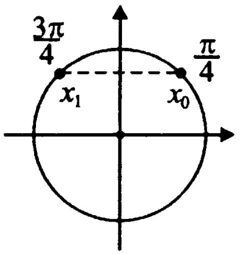


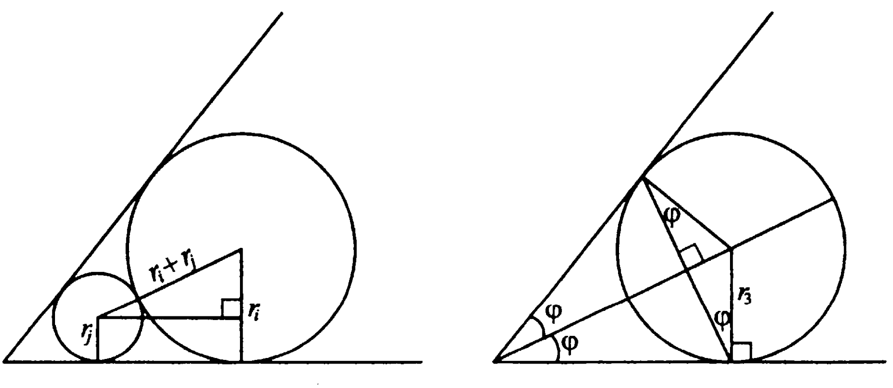
Рис. 203

Минимальная длина дуги единичной окружности, соединяющая корни, равна $l = x_1 - x_0 = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: а) $(-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$; б) $\sqrt{2}$; $\frac{\pi}{2}$.

14. Обозначим сторону $AB = c = 5$ треугольника ABC, у которого точки A, B и C есть проекции центров шаров с радиусами r_1, r_2 и r_3 соответственно, а углы при вершинах A и B есть $\alpha = \arccos\frac{4}{5}$ и $\beta = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$ соответственно.

Отрезок $r_i + r_j$, соединяющий центры шаров с радиусами r_i и r_j, проецируется на плоскость в отрезок $x = \sqrt{(r_i + r_j)^2 - (r_i - r_j)^2} = 2\sqrt{r_i r_j}$ (см. рис. 204 а).



а) б)

Рис. 204

Тогда сторона a треугольника ABC, лежащая против угла $\alpha = \arccos\frac{4}{5}$, равна $2\sqrt{r_2r_3}$, сторона b треугольника ABC, лежащая против угла β, равна $2\sqrt{r_1r_3}$, а сторона c треугольника ABC, лежащая против угла γ, равна $2\sqrt{r_1r_2}$. Перемножив, получим $abc = 8r_1r_2r_3$, то есть, $r_1r_2r_3 = \frac{abc}{8}$.

Но $r_1r_2 = \frac{c^2}{4}$, $r_1r_3 = \frac{b^2}{4}$, а $r_2r_3 = \frac{a^2}{4}$ (это следует из полученной выше формулы $x = 2\sqrt{r_ir_j}$). Тогда $r_1^2 = \frac{(r_1r_2)(r_1r_3)}{r_2r_3} = \left(\frac{bc}{2a}\right)^2$; $r_1 = \frac{bc}{2a}$; $r_2 = \frac{ac}{2b}$, а $r_3 = \frac{ab}{2c}$.

Найдём стороны треугольника ABC.
Так как $\sin(\pi - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha + \beta)$, а
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\left(\arccos\frac{4}{5}\right)\cdot\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)+\cos\left(\arccos\frac{4}{5}\right)\cdot\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) =$
$= \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} = 1$, то треугольник ABC — прямоугольный с катетами 3 и 4 единицы и гипотенузой 5 единиц.

Площадь треугольника ABC равна $S = \frac{1}{2}ab = 6$. Стороны a, b и c есть проекции на плоскость треугольника $A'B'C'$ со сторонами $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, равными сумме радиусов шаров и с вершинами в центрах шаров.

Найдём радиусы шаров: $r_1 = \frac{bc}{2a} = \frac{10}{3}$, $r_2 = \frac{ac}{2b} = \frac{15}{8}$, $r_3 = \frac{ab}{2c} = \frac{6}{5}$.

Тогда $\bar{a} = r_2 + r_3$, $\bar{b} = r_1 + r_3$ и $\bar{c} = r_1 + r_2$.

Вычислим по формуле Герона площадь этого треугольника. $p = r_1 + r_2 + r_3$, $p - \bar{a} = r_1$, $p - \bar{b} = r_2$, $p - \bar{c} = r_3$, то есть $S' = \sqrt{p(p-\bar{a})(p-\bar{b})(p-\bar{c})} = \sqrt{(r_1+r_2+r_3)r_1r_2r_3} = \sqrt{\frac{6921}{144}} =$
$= \frac{\sqrt{769}}{4}$.

Обозначим φ — угол между плоскостями этих треугольников. Тогда $\cos\varphi = \frac{S}{S'} = \frac{6\cdot 4}{\sqrt{769}} = \frac{24}{\sqrt{769}}$, $\varphi = \arccos\frac{24}{\sqrt{769}}$.

Обозначим через δ угол между плоскостями двугранного угла (см. рис. 204 б). Тогда $\delta = 2\varphi = 2\arccos\frac{24}{\sqrt{769}}$. Самым маленьким из шаров является шар с радиусом $r_3 = \frac{6}{5}$. Обозначим ρ — расстояние между точками касания шара с радиусом $r_3 = \frac{6}{5}$. Тогда $\rho = 2\cdot\frac{6}{5}\cos\varphi = \frac{288}{5\sqrt{769}}$.

Ответ: $\frac{288}{5\sqrt{769}}$; $2\arccos\frac{24}{\sqrt{769}}$.

15. 1. ОДЗ неравенства находим из условия $4 - 3\cdot 3^{\frac{1}{x}} > 0 \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{x}} - \frac{4}{3} < 0$ $\Leftrightarrow \frac{1}{x} - \log_3\frac{4}{3} < 0 \Leftrightarrow \frac{x - \log_{\frac{4}{3}} 3}{x} > 0$.

Тогда $x \in (-\infty; 0) \cup (\log_{\frac{4}{3}} 3; +\infty)$.

2. Пусть $x > 0$.

Тогда $\log_{\frac{1}{3}}(4 - 3\cdot 3^{\frac{1}{x}}) > \frac{1}{x} \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}(4 - 3\cdot 3^{\frac{1}{x}}) > \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 3\cdot 3^{\frac{1}{x}} < 3^{-\frac{1}{x}}, \\ x > \log_{\frac{4}{3}} 3. \end{cases}$$

Обозначим $t = 3^{\frac{1}{x}}$, $t > 0$. Тогда первое неравенство примет вид $4 - 3\cdot t < \frac{1}{t} \Leftrightarrow \frac{3t^2 - 4t + 1}{t} > 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 4t + 1 > 0$, то есть $t \in \left(0; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty\Big)$.

При $t \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$, $3^{\frac{1}{x}} < \frac{1}{3}$, $\frac{1}{x} < -1$, $\frac{1+x}{x} < 0$, что невозможно при $x > 0$.

При $t > 1$ $\frac{1}{x} > 0$ выполняется при всех $x > 0$.

Учитывая ОДЗ, получим $x \in (\log_{\frac{4}{3}} 3; +\infty)$.

3. Пусть $x < 0$. Тогда $\log_{\frac{1}{3}}(4 - 3\cdot 3^{\frac{1}{x}}) < \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Обозначим $t = 3^{\frac{1}{x}}$, $t > 0$.

Тогда неравенство системы примет вид $3t^2 - 4t + 1 < 0$ и $t \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$,

$\frac{1}{3} < 3^{\frac{1}{x}} < 1 \Leftrightarrow \log_3 \frac{1}{3} < \frac{1}{x} < 0, -1 < \frac{1}{x} < 0.$

Поэтому левая часть неравенства $-1 < \frac{1}{x}$ имеет вид: $\frac{1}{x} + 1 > 0$, $\frac{1+x}{x} > 0$, а решением является множество $x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.

Решением правой части неравенства $\frac{1}{x} < 0$ является множество $x < 0$ или $(-\infty; 0)$.

Пересечение множеств решений этой системы неравенств с ОДЗ и условием $x < 0$ имеет вид $x \in (-\infty; -1)$.

4. Объединяя решения пунктов 2 и 3, получим ответ:
$x \in (-\infty; -1) \cup (\log_{\frac{4}{3}} 3; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (\log_{\frac{4}{3}} 3; +\infty)$.

16. Пусть r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, а R — радиус описанной окружности, O_1 и O_2 — их центры соответственно. Углы α, β, γ — внутренние углы треугольника, соответствующие вершинам ABC.

Прямая AO_1 пересекает описанную окружность в точке D (см. рис. 205)

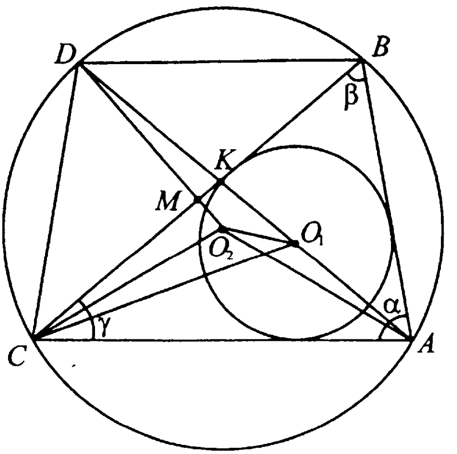


Рис. 205

Угол DBC опирается на дугу CD, DA — биссектриса угла α и проходит через центр O_1 вписанной окружности, то есть $\angle DAB = \angle CAD = \frac{\alpha}{2} = \angle DBC = \angle DCB$. Значит, $DB = DC$ (как хорды, стягивающие равные дуги), то есть точка D равноудалена от концов отрезка BC.

В треугольнике DO_1C угол при вершине O_1 есть внешний угол треугольника CO_1A и равен $\angle CO_1D = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$, а угол при вершине C $\angle DCO_1 = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$, то есть треугольник CO_1D равнобедренный и $DO_1 = DC$. Но по теореме синусов $\frac{DC}{\sin\frac{\alpha}{2}} = 2R$, откуда

$DO_1 = DC = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$.

Рассмотрим треугольник DO_1O_2, где сторона DO_1 уже известна, а $DO_2 = R$. Обозначим $\delta = \angle O_1DO_2$, а точку пересечения отрезков AD и BC через K, точку пересечения отрезков O_2D и BC через M.

Обратим внимание, что отрезок DO_2 перпендикулярен стороне BC треугольника ABC как серединный перпендикуляр. Действительно, точка D равноудалена от концов отрезка BC и поэтому лежит на серединном перпендикуляре к BC. Точка O_2 лежит на серединном перпендикуляре как центр описанной окружности. Но DO_2 — единственная прямая, проходящая через D и O_2, значит, DO_2 — серединный перпендикуляр. То есть треугольник KDM прямоугольный с прямым углом M. Угол DKB, с одной стороны, есть внешний угол треугольника KBA и равен $\beta + \frac{\alpha}{2}$ как сумма внутренних, не смежных с ним, а с другой стороны, он является внешним углом треугольника KDM и равен $\delta + \frac{\pi}{2}$, то есть $\delta = \beta + \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\beta}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{\beta-\gamma}{2}$. С другой стороны, $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta+\gamma}{2}$ (из теоремы о сумме углов треугольника).

Теперь из треугольника DO_1O_2 по теореме косинусов получим

$$d^2 = \left(2R\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 + R^2 - 4R^2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2} =$$

$$= R^2 + 4R^2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right) =$$

$$= R^2 + 4R^2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\left(\cos\frac{\beta+\gamma}{2} - \cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right) = R^2 - 8R^2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

То есть $d^2 = R^2\left(1 - 8\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)$.

По условию задачи $R = 1$, $\alpha = 40°$, $\beta = 80°$, тогда $\gamma = 60°$. Отсюда получим $d = \sqrt{1 - 4\sin 20°\sin 40°} = \sqrt{1 - 4\cdot\frac{1}{2}(\cos 20° - \cos 60°)} =$
$= \sqrt{1 - 2\cos 20° + 1} = \sqrt{2 - 2\cos 20°} = \sqrt{2\cdot 2\sin^2 10°} = 2\sin 10°$.

Ответ: $2\sin 10°$.

17. а) Получим общее выражение для постоянной суммы ежемесячного платежа. Обозначим размер кредита через K, ежемесячную выплату по кредиту через B. Она складывается из погашения основного долга по кредиту D_i в i-й месяц и погашения набежавших в i-й месяц процентов с остатка долга. Месячная процентная ставка 2%. 2% — это 2 сотых части числа. Пусть $p = \frac{2}{100}$. Тогда выплата в первый месяц $B = D_1 + Kp$, во второй месяц $B = D_2 + (K - D_1)p = D_2 + Kp - D_1p$, в третий месяц $B = D_3 + (K - D_1 - D_2)p = D_3 + Kp - D_1p - D_2p$. И так далее. То есть в k-й месяц $B = D_k + Kp - D_1p - D_2p - \ldots - D_{k-1}p$. Так как $D_1 + Kp = D_2 + Kp - D_1p$, то $D_2 = D_1(1 + p)$, а $D_k = D_1(1 + p)^{k-1}$, где $k = 24$. Но, с другой стороны, сумма выплат по кредиту без учёта процентов равна размеру самого кредита и равна $B_o = D_1 + \ldots + D_k = K = D_1 + D_1((1 + p) + (1 + p)^2 + \ldots (1 + p)^{k-1}) =$ $= D_1(1 + (1 + p) + (1 + p)^2 + \ldots (1 + p)^{k-1})$. Выражение в скобках есть геометрическая прогрессия с первым членом, равным единице, и знаменателем $q = 1 + p$. Сумма $k = 24$ первых членов которой $S_k = \frac{(1+p)^k - 1}{1 + p - 1} = \frac{(1+p)^k - 1}{p}$. Таким образом, $D_1 = \frac{Kp}{(1+p)^k - 1}$.

Теперь $B = D_1 + Kp = \frac{Kp}{(1+p)^k - 1} + Kp = Kp\left(1 + \frac{1}{(1+p)^k - 1)}\right) =$

$= Kp \cdot \dfrac{(1+p)^k}{(1+p)^k - 1}$. В нашем случае $k = 24, p = 0{,}02, K = 100\,000$.

Отсюда ежемесячная сумма выплат $B = 100\,000 \cdot 0{,}02 \cdot \dfrac{(1+0{,}02)^{24}}{(1+0{,}02)^{24} - 1}$, что и требовалось доказать.

б) Докажем, что сумма переплат по кредиту не больше 48 000 рублей. Используем заключения в пункте а).

$$B = D_1 + Kp = Kp\left(1 + \frac{1}{(1+p)^k - 1}\right).$$

Так как $(1+p)^{24} = ((1+p)^2)^{12} > (1+2p)^{12} > ((1+2p)^2)^6 >$ $> ((1+4p)^2)^3 > (1+8p)^3 > (1+24p)$, то есть

$(1+p)^{24} - 1 > (1+24p) - 1 = 24p$ и $Kp\left(1 + \dfrac{1}{(1+p)^k - 1}\right) < K\left(p + \dfrac{1}{24}\right)$.

Подставив наши данные, получим, что ежемесячная выплата при данной ставке кредитования, времени кредитования и сумме кредита $B < 100\,000\left(0{,}02 + \dfrac{1}{24}\right) = \dfrac{37\,000}{6}$.

Оценим переплату долга по кредиту:

$B \cdot 24 - 100\,000 < \dfrac{37\,000}{6} \cdot 24 - 100\,000 = 48\,000$ (рублей).

18. Данные прямые параллельны, если и только если в их уравнениях отношение коэффициентов при x равно отношению коэффициентов при y и не равно отношению свободных членов (либо ровно один из свободных членов равен 0). То есть $\dfrac{2a - a^2 + 4}{2} = \dfrac{2}{2a - a^2 + 7}$, или

$\dfrac{(3-a)(1+a)+1}{2} = \dfrac{2}{(3-a)(1+a)+4}$. Обозначим $(3-a)(1+a)+1 = t$,

тогда $\dfrac{t}{2} = \dfrac{2}{t+3}$ и $t_1 = -4$, а $t_2 = 1$. То есть $(3-a)(1+a)+1 = -4$ или $(3-a)(1+a)+1 = 1$. Отсюда $a \in \{-2; -1; 3; 4\}$.

Подставив $a = -2$, заметим, что прямые $-4x + 2y + 2 = 0$ и $2x - y - 1 = 0$ совпадают с прямой $y = 2x - 1$ и совпадают друг с другом.

Подставив $a = 3$, также заметим, что прямые $x + 2y + 2 = 0$ и $4y + 2x + 4 = 0$ совпадают с прямой $y = -\dfrac{x}{2} - 1$ и совпадают друг с другом.

При $a=-1$ уравнения прямых имеют вид: $y=-\frac{x}{2}-1$ и $y=-\frac{x}{2}$.

При $a=4$ уравнения прямых имеют вид: $y=2x-1$ и $y=2x+5$.

Расстояние между двумя параллельными прямыми есть длина перпендикуляра, опущенного из любой точки одной прямой до его пересечения с другой прямой.

При $a=-1$ рассмотрим прямоугольный треугольник, соединяющий точки $A(-2;0)$, $B(0;-1)$ и $C(0;0)$ (см. рис. 206).

Длина гипотенузы AB равна $\sqrt{5}$, площадь $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1=\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\sqrt{5}$,

отсюда $\rho=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

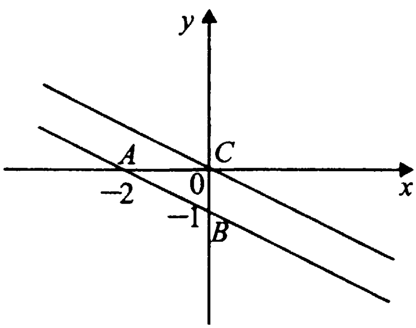


Рис. 206

При $a=4$ рассмотрим прямоугольный треугольник, соединяющий точки $A(-3;-1)$, $B(0;5)$ и $C(0;-1)$ (см. рис. 207). Длина гипотенузы AB равна $\sqrt{45}$, площадь $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6=\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\sqrt{45}$, отсюда $\rho=\frac{18}{\sqrt{45}}=\frac{6}{\sqrt{5}}$.

Сравнивая $\frac{6}{\sqrt{5}}$ и $\frac{2}{\sqrt{5}}$, получим, что $\frac{6}{\sqrt{5}}>\frac{2}{\sqrt{5}}$. Минимальное расстояние между данными прямыми реализуется при $a=-1$ и $\rho=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Ответ: -1.

19. Выделив полные квадраты, получим $x^2+2(y-1)^2+3(z-2)^2=14$, то есть все слагаемые в левой части не больше 14. Целые значения, которые может принимать переменная z, определятся из неравенства $3(z-2)^2\leqslant 14$, что означает, что $|z-2|\leqslant 2$, и $|z-2|\in\{0,1,2\}$.

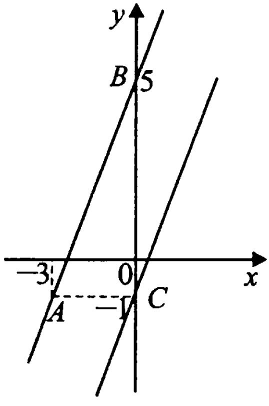


Рис. 207

1. Пусть $|z-2|=2$.

Тогда $z=0$ или $z=4$, а $x^2+2(y-1)^2=2$, отсюда $|y-1|\leqslant 1$, и $|y-1|=0$ или $|y-1|=1$.

а) При $|y-1|=0$ и $x^2=2$ решений нет.

б) При $|y-1|=1$ получим $y=0$ или $y=2$, тогда $x=0$.

В этом случае получаем четыре тройки ответов: $(x,y,z)\in\{(0,0,0),(0,2,0),(0,0,4),(0,2,4)\}$.

2. Пусть $|z-2|=1$. Тогда $x^2+2(y-1)^2=11$, а $|y-1|\in\{0,1,2\}$. Только при $|y-1|=1$ получим $|x|=3$, что даёт следующие тройки ответов: $(x,y,z)\in\{(3,2,3),(-3,2,3),(3,0,3),(3,2,1),(-3,2,1),(3,0,1),(-3,0,3),(-3,0,1)\}$.

3. Пусть $|z-2|=0$. Тогда $x^2+2(y-1)^2=14$, а $|y-1|\in\{0,1,2\}$. При этих значениях решений нет.

Ответ: $\{(0,0,0),(0,2,0),(0,0,4),(0,2,4),(3,2,3),(-3,2,3),(3,0,3),(-3,2,1),(3,2,1),(3,0,1),(-3,0,3),(-3,0,1)\}$.

Решение варианта № 40

1. $3\cdot 15=45$ (вату) за 3 кг водорослей,

$45\cdot 0{,}54=24{,}3$ (руб).

$24{,}3\approx 24$.

Ответ: 24.

2. Используя график, определяем количество граммов реагента, которое не вступило в реакцию за шесть минут, оно равно 4. Тогда масса реагента, которая вступила в реакцию, равна $24-4=20$.

Ответ: 20.

3. $S_{\substack{\text{закрашенной}\\\text{фигуры}}} = S_{\text{круга}} - \frac{3}{8}S_{\text{круга}} = \frac{5}{8}S_{\text{круга}}.$

$S_{\text{круга}} = \pi R^2 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi.$

$S_{\substack{\text{закрашенной}\\\text{фигуры}}} = \frac{5 \cdot 36\pi}{8} = 22{,}5\pi.$

В ответе $\frac{S}{\pi} = \frac{22{,}5\pi}{\pi} = 22{,}5.$

Ответ: 22,5.

4. Вероятность того, что абитуриент не сможет набрать 60 баллов ни по обществознанию, ни по истории, равна $(1-0{,}5)(1-0{,}2) = 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}4$. Следовательно, хотя бы по одному из этих двух предметов он получит 60 баллов с вероятностью $1 - 0{,}4 = 0{,}6$. Для поступления надо набрать требуемый балл по математике, русскому языку и хотя бы по одному предмету из обществознания и истории. Вероятность поступления равна $0{,}8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}288$.

Ответ: 0,288.

5. $\operatorname{tg}\frac{(x+14)\pi}{9} = \frac{1}{\sqrt{3}},$

$\frac{(x+14)\pi}{9} = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi n,\ n \in Z;$

$\frac{(x+14)\pi}{9} = \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z;$

$\frac{(x+14)}{9} = \frac{1}{6} + n,\ n \in Z;$

$2(x+14) = 3 + 18n, n \in Z;$

$2x = 18n - 25,\ 18n - 25 > 0,\ 18n > 25,\ n > \frac{25}{18}, n = 2.$

$2x = 36 - 25,\ 2x = 11,\ x = 5{,}5.$

Ответ: 5,5.

6. $S_\Delta = p \cdot r$, где p — полупериметр, r — радиус вписанной окружности (см. рис. 208).

$S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{AC^2}{2}.\ (AC = BC).$

$\frac{AC^2}{2} = \frac{2AC + AB}{2} \cdot r,\ r = \frac{AC^2}{2AC + AB};$

$AB = \sqrt{2AC^2} = AC\sqrt{2} = (54 + 27\sqrt{2})\sqrt{2} = 27\sqrt{2}(2 + \sqrt{2}).$

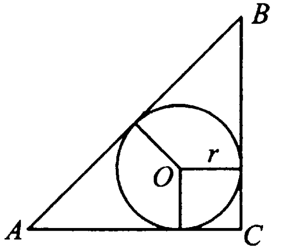


Рис. 208

$$r = \frac{(54+27\sqrt{2})^2}{2(54+27\sqrt{2})+27\sqrt{2}(2+\sqrt{2})} = \frac{(54+27\sqrt{2})^2}{(54+27\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = 27.$$

Ответ: 27.

7. $F'(x) = f(x)$, $F'(x) = 0$ в точках максимума и минимума, таких точек 8 на указанном промежутке.

Ответ: 8.

8. Плоскости MON, NO_1P, KOP и KO_1M отсекают от тетраэдра $DABC$ тетраэдры $DMON$, BNO_1P, $CKOP$, AKO_1M (см. рис. 209), каждый из которых подобен тетраэдру $DABC$ с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$. Значит, объём каждого из отсечённых тетраэдров будет равен $\frac{32}{8} = 4$. $V_{NMOPO_1K} = 32 - 4 \cdot 4 = 16$.

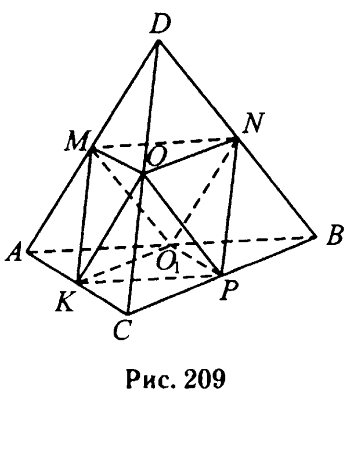


Рис. 209

Ответ: 16.

9. $\dfrac{P(b)}{P\left(\frac{1}{b}\right)} = \dfrac{\left(b-\frac{21}{b}\right)\left(-21+\frac{1}{b}\right)}{\left(\frac{1}{b}-\frac{21}{\frac{1}{b}}\right)\left(-21\frac{1}{b}+\frac{1}{\frac{1}{b}}\right)} = \dfrac{\left(b-\frac{21}{b}\right)\left(-21b+\frac{1}{b}\right)}{\left(\frac{1}{b}-21b\right)\left(-\frac{21}{b}+b\right)} = 1.$

Ответ: 1.

10. $pV^k =$const, const$= 10{,}24 \cdot 5000$ Па·м^5.

$k = \dfrac{5}{3}$,

$p \geqslant 1{,}6 \cdot 10^3$ Па.

$pV^k = 10{,}24 \cdot 5000,\ p = \dfrac{10{,}24 \cdot 5000}{V^k},\ \dfrac{10{,}24 \cdot 50}{V^k} \geqslant 1{,}6 \cdot 10^3,$

$V^k \leqslant \dfrac{1024 \cdot 50}{16 \cdot 10^2},\ \dfrac{1024 \cdot 50}{16 \cdot 10^2} = \dfrac{2^{10} \cdot 50}{2^4 \cdot 100} = 2^5 = 32.$

$V^k \leqslant 2^5,\ V^{\frac{5}{3}} \leqslant 2^5,\ V \leqslant 8.$

Наибольший объём газа равен 8.

Ответ: 8.

11. Кольцевая трасса имеет протяжённость 4 км. Гонщикам необходимо проехать 75 кругов, то есть преодолеть расстояние $75 \cdot 4 = 300$ (км). Обозначим x км/ч ($x > 0$) — скорость первого гонщика, а y км/ч ($y > 0$) — скорость второго гонщика, тогда $\dfrac{300}{x}$ — время первого гонщика, $\dfrac{300}{y}$ — время второго гонщика. Разность между временем второго и первого гонщиков равна 37,5 минуты, или $\dfrac{37{,}5}{60}$ ч$= 0{,}625$ часа.

Составим уравнение $\dfrac{300}{y} - \dfrac{300}{x} = 0{,}625,\quad 300(x-y) = 0{,}625xy,$ $480(x-y) = xy.$

Во втором условии сказано, что первый гонщик обогнал второго на 1 круг за 10 минут, или $\dfrac{10}{60}$ ч$= \dfrac{1}{6}$ часа.

Составим второе уравнение $\dfrac{1}{6}x - \dfrac{1}{6}y = 4,\ x - y = 24.$

Получим систему уравнений $\begin{cases} 480(x-y) = xy, \\ x - y = 24. \end{cases}$

$x = 24 + y.$

$480(24 + y - y) = y(24 + y);$

$480 \cdot 24 = 24y + y^2;$

$y^2 + 24y - 11\,520 = 0,$

$y_1 = -12 + 108 = 96,\ y_2 = -12 - 108 = -120.$

Так как $y > 0$, то $y = 96$.

Скорость второго гонщика равна 96 км/ч.

Ответ: 96.

12. $y = -16x + 8\,\mathrm{tg}\,x + 4\pi + 9$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

$y' = -16 + \frac{8}{\cos^2 x},\ y' = 0,\ -16 + \frac{8}{\cos^2 x} = 0,\ \frac{8}{\cos^2 x} = 16,\ \cos^2 x = \frac{1}{2},$

$\cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2};$

$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z;\ x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z.$

$x = \pm\frac{\pi}{4}$ принадлежат отрезку $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$ (см. рис. 210).

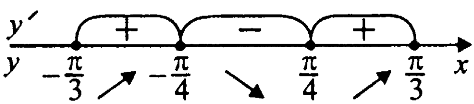


Рис. 210

$x = \frac{\pi}{4}$ — точка минимума, поэтому функция $y = -16x + 8\,\mathrm{tg}\,x + 4\pi + 9$ принимает наименьшее значение либо при $x = \frac{\pi}{4}$, либо при $x = -\frac{\pi}{3}$.

$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -16 \cdot \frac{\pi}{4} + 8 + 4\pi + 9 = -4\pi + 8 + 4\pi + 9 = 17.$

$y\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{28\pi}{3} - 8\sqrt{3} + 9 > 28 - 8 \cdot 1{,}8 + 9 = 22{,}6 > 17.$

Ответ: 17.

13. Преобразуем уравнение к виду $\frac{3}{\sin^2 x} - \frac{3\sqrt{3}}{\sin x} + 2 = 0.$

Сделаем замену $t = \frac{\sqrt{3}}{\sin x}$ при $\sin x \neq 0$. Тогда для новой переменной t получим квадратное уравнение $t^2 - 3t + 2 = 0$, корни которого $t_1 = 1$ и $t_2 = 2$.

Теперь $\left[\begin{array}{l}\sin x=\sqrt{3}, \\ \sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\end{array}\right.$ Первое уравнение совокупности не имеет действительных решений, решение второго:

$x = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k = (-1)^k\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z,\ x_0 = \frac{\pi}{3}$, $x_1 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. На единичной окружности (см. рис. 211) ординаты этих корней равны $\frac{\sqrt{3}}{2}$, то есть минимальное расстояние между двумя несовпадающими корнями уравнения есть модуль разности их абсцисс, то есть $p = |\cos x_1 - \cos x_0|$.

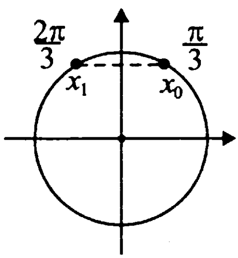


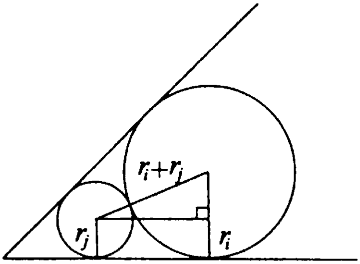
Рис. 211

Но $|\cos x| = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$, тогда $\cos x_0 = \frac{1}{2}$ и $\cos x_1 = -\frac{1}{2}$, а $p = |\cos x_1 - \cos x_0| = 1$.

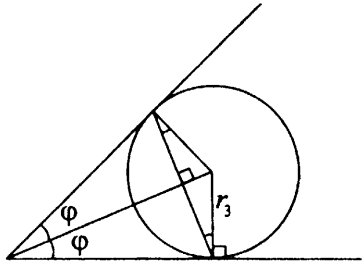
Минимальная длина дуги единичной окружности, соединяющая корни, равна $l = x_1 - x_0 = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$.

Ответ: а) $(-1)^k\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$; б) 1; $\frac{\pi}{3}$.

14. Проекции центров шаров образуют на плоскости двугранного угла треугольник ABC. Отрезок $r_i + r_j$, соединяющий центры шаров с радиусами r_i и r_j, проецируется на плоскость в отрезок $x = \sqrt{(r_i+r_j)^2 - (r_i-r_j)^2} = 2\sqrt{r_i r_j}$ (см. рис 212а).



а)



б)

Рис. 212

Тогда сторона a треугольника ABC, лежащая против угла A, равна $a = 2\sqrt{r_2 r_3} = 2\sqrt{\frac{15}{8} \cdot \frac{6}{5}} = 3$, сторона b треугольника ABC, лежащая против угла B, равна $b = 2\sqrt{r_1 r_3} = 2\sqrt{\frac{10}{3} \cdot \frac{6}{5}} = 4$, а сторона c треугольника ABC, лежащая против угла C, равна $c = 2\sqrt{r_1 r_2} = 2\sqrt{\frac{10}{3} \cdot \frac{15}{8}} = 5$.

Таким образом, треугольник ABC прямоугольный с катетами 3 и 4 единицы и гипотенузой 5 единиц. Площадь треугольника ABC $S = \frac{1}{2}ab = 6$. Стороны a, b и c есть проекции на плоскость треугольника $A'B'C'$ со сторонами $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, равными сумме радиусов шаров и с вершинами в центрах шаров.

Тогда $\overline{a} = r_2 + r_3$, $\overline{b} = r_1 + r_3$ и $\overline{c} = r_1 + r_2$.

Вычислим по формуле Герона площадь этого треугольника.

$p = r_1 + r_2 + r_3$, $p - \overline{a} = r_1$, $p - \overline{b} = r_2$, $p - \overline{c} = r_3$, то есть $S' = \sqrt{p(p-\overline{a})(p-\overline{b})(p-\overline{c})} = \sqrt{(r_1+r_2+r_3)r_1 r_2 r_3} = \frac{\sqrt{769}}{4}$.

Обозначим угол φ — угол между плоскостями этих треугольников (см. рис. 212б), тогда $\cos\varphi = \frac{S}{S'} = \frac{6 \cdot 4}{\sqrt{769}} = \frac{24}{\sqrt{769}}$, а $\varphi = \arccos\frac{24}{\sqrt{769}}$.

Обозначим угол между плоскостями двугранного угла δ, тогда $\delta = 2\varphi = 2\arccos\frac{24}{\sqrt{769}}$.

Самым маленьким из шаров является шар с радиусом $r_3 = \frac{6}{5}$. Тогда расстояние между точками касания шара с радиусом $r_3 = \frac{6}{5}$ равно $\rho = 2 \cdot \frac{6}{5} \cos\varphi = \frac{288}{5\sqrt{769}}$.

Ответ: $\frac{288}{5\sqrt{769}}$.

15. 1. ОДЗ неравенства находим из условия $\frac{28}{3} - 3 \cdot 3^{\frac{1}{x}} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^{\frac{1}{x}} < \frac{28}{9} \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \log_3 \frac{28}{9} < 0 \Leftrightarrow \frac{x - \log_{\frac{28}{9}} 3}{x} > 0.$

Тогда $x \in (-\infty; 0) \cup (\log_{\frac{28}{9}} 3; +\infty)$.

2. Пусть $x > 0$.

Тогда $\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{28}{3} - 3 \cdot 3^{\frac{1}{x}}\right) > \frac{1}{x}$,

$$\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{28}{3} - 3 \cdot 3^{\frac{1}{x}}\right) > \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{28}{3} - 3 \cdot 3^{\frac{1}{x}} < 3^{-\frac{1}{x}}, \\ x > \log_{\frac{28}{9}} 3. \end{cases}$$

Обозначим $t = 3^{\frac{1}{x}}$, $t > 0$.

Тогда первое неравенство примет вид $\frac{28}{3} - 3 \cdot t < \frac{1}{t} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{9t^2 - 28t + 3}{t} > 0 \Leftrightarrow 9t^2 - 28t + 3 > 0$, то есть $t \in \left(0; \frac{1}{9}\right) \cup (3; +\infty)$.

При $t > 3$, $3^{\frac{1}{x}} > 3$, $\frac{1}{x} > 1 \Leftrightarrow x \in (0; 1)$.

Учитывая, что $\log_{\frac{28}{9}} 3 < 1$ (так как $3 < \frac{28}{9}$), получим $x \in (\log_{\frac{28}{9}} 3; 1)$.

При $t \in \left(0, \frac{1}{9}\right)$, $x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, но по условию $x > 0$, значит, в этом случае решений нет.

3. Пусть $x < 0$.

Тогда $\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{28}{3} - 3\cdot 3^{\frac{1}{x}}\right) < \frac{1}{x}$,

$\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{28}{3} - 3\cdot 3^{\frac{1}{x}}\right) < \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$, $\frac{28}{3} - 3\cdot 3^{\frac{1}{x}} < 3^{-\frac{1}{x}}$.

Обозначим $t = 3^{\frac{1}{x}}$, $t > 0$. Тогда неравенство системы примет вид $9t^2 - 28t + 3 < 0$ и $t \in (3^{-2}; 3)$, $3^{-2} < 3^{\frac{1}{x}} < 3$, $-2 < \frac{1}{x} < 1$.

Левая часть двойного неравенства $-2 < \frac{1}{x}$ имеет решение при $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (0; +\infty)$.

Правая часть $\frac{1}{x} < 1$ имеет решение при $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

Пересечение этих множеств решений с ОДЗ и условием $x < 0$ имеет вид $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$.

4. Объединяя решения пунктов 2 и 3, получим ответ: $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (\log_{\frac{28}{9}} 3; 1)$.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (\log_{\frac{28}{9}} 3; 1)$.

16. Пусть r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, а R — радиус описанной окружности, O_1 и O_2 — их центры соответственно (см. рис. 213).

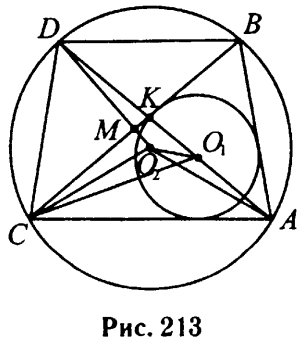


Рис. 213

Углы α, β, γ — внутренние углы треугольника, соответствующие вершинам A, B, C. Угол DBC опирается на дугу CD, DA — биссектриса угла α и проходит через центр O_1 вписанной окружности, то есть $\angle DAB = \angle CAD = \frac{\alpha}{2} = \angle DBC = \angle DCB$. Отсюда $DB = DC$ (как хорды, стягивающие равные дуги), то есть точка D равноудалена от концов отрезка BC.

В треугольнике DO_1C угол при вершине O_1 есть внешний угол треугольника CO_1A и равен $\angle CO_1D = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$, а угол при вершине C $\angle DCO_1 = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$ $\left(\text{так как } \angle BCO_1 = \frac{\gamma}{2}\right)$, то есть треугольник CO_1D равнобедренный и $DO_1 = DC$. Но по теореме синусов $\dfrac{DC}{\sin\frac{\alpha}{2}} = 2R$, откуда $DO_1 = DC = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$. Рассмотрим треугольник DO_1O_2, где сторона DO_1 уже указана, а $DO_2 = R$.

Обозначим $\delta = \angle O_1DO_2$, точку пересечения отрезков AD и BC через K, а точку пересечения отрезков O_2D и BC через M.

Обратим внимание, что отрезок DO_2 перпендикулярен стороне BC треугольника ABC как серединный перпендикуляр.

Действительно, точка D равноудалена от концов отрезка BC и поэтому лежит на серединном перпендикуляре к BC. Точка O_2 лежит на серединном перпендикуляре как центр описанной окружности. Но DO_2 — единственная прямая, проходящая через D и O_2. Значит, DO_2 — серединный перпендикуляр.

То есть треугольник KDM прямоугольный с прямым углом M. Угол DKB, с одной стороны, есть внешний угол треугольника KBA и равен $\beta + \frac{\alpha}{2}$ как сумма внутренних, не смежных с ним, а с другой стороны, он является внешним углом треугольника KDM и равен $\delta + \frac{\pi}{2}$, то есть

$$\delta = \beta + \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\beta}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{\beta-\gamma}{2}.$$

С другой стороны, $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta+\gamma}{2}$ (из теоремы о сумме углов треугольника). Теперь из треугольника DO_1O_2 по теореме косинусов получим

$$d^2 = \left(2R\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 + R^2 - 4R^2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2} =$$

$$= R^2 + 4R^2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\left(\cos\frac{\beta+\gamma}{2} - \cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right) = R^2 - 8R^2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

То есть $d^2 = R^2\left(1 - 8\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)$.

Отсюда $R = \dfrac{d}{\sqrt{1 - 8\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}}$.

По условию задачи $d = 4$, $\alpha = 40°$, $\beta = 80°$, тогда $\gamma = 60°$. Отсюда получим $R = \dfrac{4}{\sqrt{1 - 4\sin 20°\cdot\sin 40°}} = \dfrac{4}{\sqrt{1 - 4\cdot\frac{1}{2}(\cos 20° - \cos 60°)}} =$

$$= \frac{4}{\sqrt{2 - 2\cos 20°}} = \frac{4}{\sqrt{2\cdot 2\sin^2 10°}} = \frac{4}{2\cdot\sin 10°} = \frac{2}{\sin 10°}.$$

Ответ: $\dfrac{2}{\sin 10°}$.

17. а) Обозначим размер кредита через K, ежемесячную выплату по кредиту через B. По условию $B = 4\,000$ руб. Сумма ежемесячного платежа складывается из погашения основного долга по кредиту D_i в i-й месяц и погашения набежавших в i-й месяц процентов от остатка долга. Месячная процентная ставка 2,5%. По определению процента это $p = 0{,}025$. Тогда выплата в первый месяц $B = D_1 + K\cdot p$, во второй месяц $B = D_2 + (K - D_1)\cdot p = D_2 + K\cdot p - D_1\cdot p$ и так далее в k-й месяц $B = D_k + K\cdot p - D_1\cdot p - D_2\cdot p - \ldots - D_{k-1}\cdot p$.

Так как $D_1 + K\cdot p = D_2 + K\cdot p - D_1\cdot p$, то $D_2 = D_1\cdot(1+p)$, а $D_k = D_1\cdot(1+p)^{k-1}$, где $k = 12$.

С другой стороны, сумма выплат по кредиту без учёта процентов равна $B_o = D_1 + \ldots + D_k = K = D_1 + D_1((1+p) + (1+p)^2 + \ldots + (1+p)^{k-1}) =$ $= D_1(1 + (1+p) + (1+p)^2 + \ldots + (1+p)^{k-1})$.

Выражение в скобках есть геометрическая прогрессия с первым членом, равным единице, и знаменателем $q = 1 + p$. Сумма $k = 12$ первых членов которой равна $S_k = \dfrac{(1+p)^k - 1}{1+p-1} = \dfrac{(1+p)^k - 1}{p}$.

Отсюда $D_1 = \dfrac{K\cdot p}{(1+p)^k - 1}$.

$$B = D_1 + K \cdot p = \frac{K \cdot p}{(1+p)^k - 1} + K \cdot p = K \cdot p \cdot \frac{(1+p)^k}{(1+p)^k - 1}.$$

$$K = \frac{B((1+p)^k - 1)}{p \cdot (1+p)^k}.$$

В нашем случае $k = 12$, $p = 0{,}025$ и $K = \dfrac{4\,000 \cdot ((1+0{,}025)^{12} - 1)}{0{,}025 \cdot (1+0{,}025)^{12}}$, что и требовалось доказать.

б) Докажем, что сумма кредита больше, чем 36 923 рубля.

Используем заключения в пункте а).

$$B = D_1 + K \cdot p = \frac{K \cdot p}{(1+p)^k - 1} + K \cdot p = K \cdot p\left(\frac{1}{(1+p)^k - 1} + 1\right),$$

$k = 12$.

Так как $(1+p)^{12} = ((1+p)^2)^6 > (1+2p)^6 > ((1+2p)^2)^3 > (1+4p)^3 > > (1+12p)$, то есть $(1+p)^{12} - 1 > (1+12p) - 1 = 12p$.

$$K \cdot p \cdot \left(1 + \frac{1}{(1+p)^{12} - 1}\right) < K\left(p + \frac{1}{12}\right).$$

Тогда $B < K\left(p + \frac{1}{12}\right)$, следовательно, $K > \dfrac{B}{p + \frac{1}{12}}$.

Подставив наши данные, получим, что сумма кредита $K > \dfrac{B}{0{,}025 + \frac{1}{12}} = \dfrac{4\,000}{\frac{1}{40} + \frac{1}{12}} = \dfrac{4\,000 \cdot 40 \cdot 12}{52} = \dfrac{4\,000 \cdot 120}{13} > 36\,923$ (руб.)

$K > 36\,923$. Что и требовалось доказать.

18. Прямые совпадают, если и только если в их уравнениях отношение коэффициентов при x равно отношению коэффициентов при y и равно отношению свободных членов (либо соответствующие коэффициенты в некоторых отношениях равны 0 одновременно). Рассмотрим равенство коэффициентов.

$$\frac{2a - a^2 + 4}{2} = \frac{2}{2a - a^2 + 7}, \quad \frac{(3-a)(1+a)+1}{2} = \frac{2}{(3-a)(1+a)+4}.$$

Обозначим $(3-a)(1+a)+1 = t$, тогда $\frac{t}{2} = \frac{2}{t+3}$ и $t_1 = -4$, а $t_2 = 1$.

Прямые параллельны или совпадают, когда отношение коэффициентов при переменных равно -2 или $\frac{1}{2}$. При этом $a \in \{-2; -1; 3; 4\}$. Отношение свободных членов: $\dfrac{2}{a+1} = -2$ (для $a = -2$) или $\dfrac{2}{a+1} = \dfrac{1}{2}$ (для $a = 3$). Если же один из свободных членов равен 0, то и второй должен равняться нулю.

То есть, чтобы прямые совпадали, надо, чтобы $a = -2$ или $a = 3$.

При $a = 3$ уравнение прямой имеет вид: $y = -\dfrac{x}{2} - 1$.

При $a = -2$ уравнение прямой имеет вид: $y = 2x - 1$. Расстояние от точки до прямой есть длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую.

При $a = -2$ рассмотрим прямоугольный треугольник, соединяющий точки $A(0; -1)$, $B\left(\dfrac{1}{2}; 0\right)$ и $C(0; 0)$ (см. рис. 214). Длина гипотенузы AB равна $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, площадь $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 1 = \dfrac{1}{2} \cdot \rho \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \rho = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

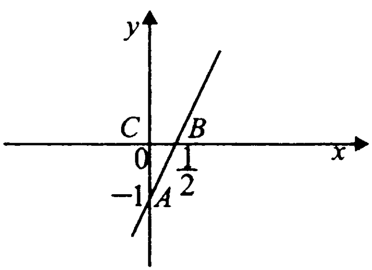


Рис. 214

При $a = 3$ рассмотрим прямоугольный треугольник, соединяющий точки $A(-2; 0)$, $B(0; -1)$ и $C(0; 0)$ (см. рис. 215). Длина гипотенузы AB равна $\sqrt{5}$, площадь $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = \dfrac{1}{2} \cdot \rho \cdot \sqrt{5} \Rightarrow \rho = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Ответ: $a = -2, \rho = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$; $a = 3, \rho = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

19. Выделив полные квадраты, получим $(x-1)^2 + 2(y-2)^2 + 3(z-3)^2 = 11$, то есть все слагаемые в левой части не больше 11. Целые значения, которые может принимать переменная z, определятся из неравенства $3(z-3)^2 \leqslant 11$, что означает, что $|z-3| \leqslant 1$, и $\{|z-3|\} = \{0, 1\}$.

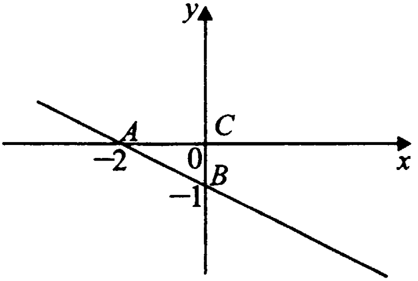


Рис. 215

1. Пусть $|z-3|=1$.

Тогда $z=2$ или $z=4$, а $(x-1)^2+2(y-2)^2=8$, отсюда $|y-2|\leqslant 2$, и $|y-2|=0$, или $|y-2|=1$, или $|y-2|=2$.

а) При $|y-2|=0$ и $(x-1)^2=8$ целых корней нет.

б) При $|y-2|=1$, $(x-1)^2=6$ целых корней нет.

в) При $|y-2|=2$, $(x-1)^2=0$ и $x=1$. То есть если $|z-3|=1$ и $|y-2|=2$, то $x=1$.

Это даёт следующие тройки корней: $(1,0,2),(1,0,4),(1,4,2),(1,4,4)$.

2. Пусть $|z-3|=0$, то есть $z=3$. Тогда $(x-1)^2+2(y-2)^2=11$, а $\{|y-2|\}=\{0,1,2\}$.

а) При $|y-2|=0$ и $(x-1)^2=11$ целых корней нет.

б) При $|y-2|=1$, $(x-1)^2=9$, а $|x-1|=3$.

Это даёт следующие тройки ответов: $(-2,1,3)$, $(4,1,3)$, $(-2,3,3)$, $(4,3,3)$.

в) При $|y-2|=2$ и $(x-1)^2=3$ целых корней нет.

Ответ: $\{(1,0,2),\ (1,0,4),\ (1,4,2),\ (1,4,4),\ (-2,1,3),\ (4,1,3),\ (-2,3,3),(4,3,3)\}$.

Учебное издание

Авилов Николай Иванович, **Войта** Елена Александровна,
Дерезин Святослав Викторович, **Иванов** Сергей Олегович,
Коннова Елена Генриевна, **Корянов** Анатолий Георгиевич,
Кривенко Виктор Михайлович, **Кулабухов** Сергей Юрьевич,
Ольховая Людмила Сергеевна, **Ольховой** Алексей Федорович,
Резникова Нина Михайловна, **Фридман** Елена Михайловна,
Ханин Дмитрий Игоревич

МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ЕГЭ-2016. ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ.

Решения с методическими рекомендациями

Под редакцией ***Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова***

Налоговая льгота: издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Обложка *В. Кириченко*
Компьютерная верстка *О. Сапожников*
Корректор *Л. Андрецова*

Подписано в печать с оригинал-макета 11.12.2015.
Формат 60x84$^1/_{16}$. Бумага типографская.
Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 20,46.
Тираж 5000 экз. Заказ № **82.**

Издательство ООО «Легион» включено в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, которые допускаются к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждениях. Приказ Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009 зарегистрирован в Минюст России 15.01.2010 № 15987.

ООО «ЛЕГИОН»
Для писем: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550.
Адрес редакции: 344082, г. Ростов-на-Дону, ул. Согласия, 7.
www.legionr.ru e-mail: legionrus@legionrus.com

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных диапозитивов в ООО «Полиграфобъединение»
347900, г. Таганрог, ул. Лесная биржа, 6В.